

# 环境阻尼作用下 Kelvin-Voigt 型输流曲管的混沌运动\*

王琳 倪樵 黄玉盈  
(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

**摘要** 考虑环境阻尼因素的影响,研究了具有运动约束作用 Kelvin-Voigt 型输流曲管的混沌运动现象.数值仿真表明,输流曲管系统在某些参数取值时具有混沌运动的可能,管道材料的粘弹性系数和环境阻尼等因素对曲管的动力响应产生较大的影响.这些结论可为工程管道系统的铺设与设计提供参考.

**关键词** Kelvin-Voigt 型,输流曲管,混沌,粘弹性系数,环境阻尼

## 引言

输流管道是一种重要的工程结构,它在机械、航空航天与海洋工程等诸多工程领域都有着广泛的应用,特别是对于核反应堆和大型的石油化工设施,如何避免管道的大幅振动或混沌振动,一直是工程界迫切需要解决的问题.因此,最近几十年内,输流管道这一动力学模型已成为大量学者的研究热点.

目前,有关输流直管因非线性因素所引起的混沌振动,已有比较成熟的研究成果.然而,对于输流曲管,由于其问题本身较直管复杂,人们对它的稳定性及动力学方面的研究多局限于线性范围,如文[1~3]研究了线性情况下输流曲管的临界流速、振动频率和失稳方式等.近十年来,人们对输流曲管的非线性振动也开始作初步研究,尚处于起步阶段. Ko 和 Bert<sup>[4]</sup>, Dupuis 和 Roussellet<sup>[5]</sup> 分别从不同侧重点推导了曲管的非线性运动方程,主要考虑的是几何非线性.最近,文献[6]研究了一种具有运动约束作用输流曲管的非线性振动行为,发现曲管的振动在流速参数区域内具有复杂的分岔现象,在某些参数条件下系统还会出现混沌振动形态.但是,这一研究所考虑的管道材料无时间效应,其分析过程中还忽略了环境阻尼的影响.

现有的研究表明,某些新型材料或高温下金属材料输流管道通常都表现出一定的粘弹性,对于这类管道的分析有必要考虑材料的时间效应;此外,文[7]的研究还表明,环境阻尼这一因素对输流曲管的临界流速和振动频率也会产生一定的影响.因

此,在分析输流曲管的非线性动力响应时,有必要考虑材料的粘弹性和环境阻尼等因素,因为这些因素有可能对曲管系统的动力响应产生较大的影响.这也是本文主要进行的工作.

## 1 系统运动方程

本文所研究的输流曲管模型如图 1 所示,曲管在  $\theta_c$  处设置有运动约束.设定  $w$  和  $u$  分别为曲管的切向和径向位移.流体从一端流入,另一端流出,管道内部单位长度流体的质量为  $M$ ,其速度为  $V$ ,流体压力为  $p$ .曲管的张角为  $\theta_0$ ,轴心线的半径为  $R$ ,管道的有效弯曲刚度为  $EI$ ,管道的横截面内环周长为  $S$ ,且单位长度空管道的质量为  $m$ .此外,本文所考虑的管道材料满足 Kelvin-Voigt 模型,其粘弹性系数为  $E^*$ .因此,曲管横截面上的弯矩可以写成

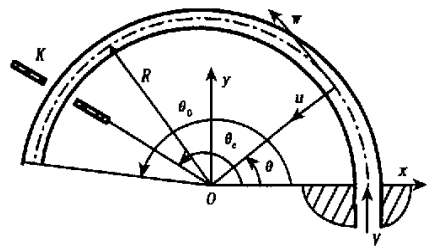


图 1 输流曲管模型

Fig. 1 The fluid-conveying curved pipe model

$$\bar{M} = \left( E^* \frac{\partial}{\partial t} + E \right) \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

设环境阻尼的强度系数为  $C$ ,它反映了由于管道与周围流体介质之间摩擦力所产生的阻尼效应,

2005-03-07 收到第 1 稿,2005-03-21 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10272051)

则在切向和径向方向上的阻尼力分别为

$$D_w = C\dot{w}, D_u = C\dot{u} \quad (2)$$

根据文献[6,8],运动约束对管道的作用力可以采用3次非线性弹簧来模拟

$$f = Ku^3\delta(\theta - \theta_c) \quad (3)$$

其中  $K$  表示非线性弹簧的刚度系数,  $\delta$  表示 Dirac delta 函数. 假设曲管轴线不可伸缩<sup>[2]</sup>, 可以将曲管的径向位移用切向位移来表示

$$u = \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4)$$

下面将分别对管道微元和流体微元进行力的平衡分析. 根据文献[2], 对于管道微元, 变形后的曲率半径可写成

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (5)$$

若设定  $F$  和  $T$  分别为管道微元横截面上的剪力和法向作用力,  $q$  为管道微元内表面的剪应力,  $Q$  为单位长度管道和流体之间的横向力, 则曲管微元的转动以及在切向和径向上的平衡方程分别为

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + RF = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + RSq - F + C\dot{w} = mR \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} + T - RQ - fR + C\dot{u} = mR \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

类似的, 可以得到流体微元在切向和径向上的平衡关系<sup>[2]</sup>

$$A \frac{\partial p}{\partial \theta} + RSq = -MR \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{V^2}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \right] \quad (9)$$

$$Q - \frac{PA}{R} = \frac{MV^2}{R} \left( 1 + \frac{u}{R} \right) + M \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2V}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \theta} + \frac{2V}{R} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{V^2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (10)$$

利用式(1)~(5), 忽略流体压力项, 方程(6)~(10)可以转化为一个关于切向位移的无量纲偏微分方程

$$\begin{aligned} & (1/\theta_0^3) \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \xi'''' + (1/\theta_0^4) \left( 2 + v + 2\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \xi''' + \\ & 2(1/\theta_0^3) v \sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} \xi'' + (1/\theta_0^2) \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial \tau} + 2v^2 - \varphi \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \xi' + 2(1/\theta_0) v \sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} \xi + \\ & \left( v^2 + \varphi \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \xi + 3[k\xi^2] \delta(\xi - \end{aligned}$$

$$\xi_c) + [k\xi^3] \delta'(\xi - \xi_c) = 0 \quad (11)$$

式中  $\xi = \partial^2/\partial \zeta^2$  (其余类推),  $\zeta = \theta/\theta_0$ . 无量纲参数包括

$$\begin{aligned} \xi &= w/R, \eta = u/R, \zeta = \theta/\theta_0, \\ \beta &= M/(m+M), v = (M/EI)^{1/2} RV, \\ \tau &= [EI/(M+m)]^{1/2} t/R^2, \\ k &= K(R^6/EI\theta_0^6), \\ \eta &= E^* I/R^2 \sqrt{EI(m+M)}, \\ \varphi &= CR/\sqrt{EI(m+M)}. \end{aligned}$$

分析方程(11)可知, 当  $k=0$  时, 相当于没有运动约束的情况, 曲管的运动方程可以退化到文献[7]的方程形式. 若取  $\eta = \varphi = k = 0$ , 相当于既没有运动约束, 也不考虑环境阻尼和材料的粘弹性因素, 此时曲管的运动方程可退化到文献[2]中的方程形式. 方程(11)的定解需引入输流曲管的边界条件<sup>[7]</sup>

$$\xi(0, \tau) = \eta(0, \tau) = \eta'(0, \tau) = 0 \quad (12a)$$

$$(1/\theta_0^3) \xi''(1, \tau) + (1/\theta_0) \xi'(1, \tau) = 0 \quad (12b)$$

$$(1/\theta_0^4) \xi'''(1, \tau) + (1/\theta_0^2) \xi'(1, \tau) = 0 \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[ (1/\theta_0^5) \xi''''(1, \tau) + (1/\theta_0^3) \times \right. \\ & \left. \xi'''(1, \tau) \right] + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (1/\theta_0^2) \xi'(1, \tau) + \right. \\ & \left. \xi(1, \tau) \right] + \varphi(1/\theta_0) \frac{\partial}{\partial \tau} \xi'(1, \tau) + \\ & (1/\theta_0) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \xi'(1, \tau) + v^2 = 0 \quad (12d) \end{aligned}$$

## 2 运动方程的空间离散

本节采用微分求积法(DQM)对方程(11)和(12)在空间上加以离散, 最终可形成一个关于时间域的二阶常微分方程组. DQM的主要特点是避免了大量的数值积分运算, 这对于本文所研究的管道模型而言, 工作量少, 且易于计算机实施.

微分求积法本质上是把函数在给定网点上的各阶导数值近似的用域上全部网点处的函数值的加权和表示. 有关此法的详细过程, 可参阅文献[9, 10], 此处不再赘述. 取网点数  $N=12$ , 采用下列公式划分区域  $\xi(0 \leq \xi \leq 1)$  得到非均匀网点

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \Delta, \xi_3 = 2\Delta, \xi_{N-2} = 1 - 2\Delta,$$

$$\xi_{N-1} = 1 - \Delta, \xi_N = 1$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos[(i-3)\pi/(N-4)] \}$$

$$(i = 4, 5, \dots, N-3)$$

$\Delta$  是为了引入边界条件而采用的邻接处理,  $\Delta$  为小量 ( $\Delta = 10^{-3} \sim 10^{-6}$ ). 将微分求积法应用于本文所研究的管道模型, 可得到运动方程(11) 和边界条件(12) 的微分求积格式如下

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [(1/\theta_0^6)A_{ij}^{(6)} + (1/\theta_0^4)(2+v^2)A_{ij}^{(4)} + \\ & (1/\theta_0^2)(1+2v^2)A_{ij}^{(2)}] \xi_j + v^2 \xi_i + \\ & \sum_{j=1}^N [\eta(1/\theta_0^6)A_{ij}^{(6)} + 2\eta(1/\theta_0^4)A_{ij}^{(4)} + \\ & 2\sqrt{\beta}v(1/\theta_0^3)A_{ij}^{(3)} + \eta(1/\theta_0^2)A_{ij}^{(2)} - \\ & \varphi(1/\theta_0^2)A_{ij}^{(2)} + 2\sqrt{\beta}v(1/\theta_0)A_{ij}^{(1)}] \xi_j + \\ & \varphi \xi_i + \sum_{j=1}^N (1/\theta_0^2)A_{ij}^{(2)} \xi_j - \xi_i + \\ & 3k \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \xi_j \right)^2 \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \xi_j \right) + \\ & kA_{\alpha}^{(1)} \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \xi_j \right)^2 \left( \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \xi_j \right) = 0 \\ & (i = 4, 5, \dots, N-3) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\xi_1 = 0, \sum_{j=1}^N A_{2j}^{(1)} \xi_j = 0, \sum_{j=1}^N A_{3j}^{(2)} \xi_j = 0 \quad (14a)$$

$$(1/\theta_0^3) \sum_{j=1}^N A_{N-2j}^{(3)} \xi_j + (1/\theta_0) \sum_{j=1}^N A_{N-2j}^{(1)} \xi_j = 0 \quad (14b)$$

$$(1/\theta_0^4) \sum_{j=1}^N A_{N-1j}^{(4)} \xi_j + (1/\theta_0^2) \sum_{j=1}^N A_{N-1j}^{(2)} \xi_j = 0 \quad (14c)$$

$$\begin{aligned} & (1/\theta_0^5) \sum_{j=1}^N A_{Nj}^{(5)} \xi_j + (1/\theta_0^3) \sum_{j=1}^N A_{Nj}^{(3)} \xi_j + \\ & \sum_{j=1}^N [2(1/\theta_0^2)\sqrt{\beta}vA_{ij}^{(2)} + \eta(1/\theta_0^6)A_{ij}^{(6)} + \\ & \eta(1/\theta_0^3)A_{ij}^{(3)} + \varphi(1/\theta_0)A_{ij}^{(1)}] \xi_j + \\ & \xi_N + (1/\theta_0) \sum_{j=1}^N A_{Nj}^{(1)} \xi_j + v^2 = 0 \end{aligned} \quad (14d)$$

其中  $A_{ij}^{(n)}$  为权系数矩阵. 将(13) 和(14) 合并写成矩阵的形式

$$[M]\{\dot{\xi}\} + [G]\{\dot{\xi}\} + [K]\{\xi\} = \{Q\} \quad (15)$$

式中  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[G]$  和  $\{Q\}$  分别为动力系统的质量矩阵、刚度矩阵、陀螺矩阵和外载荷矢量. 不难看出,  $[K]$  和  $[G]$  中含有无量纲流速和质量比等参数. 由于运动约束的存在,  $[K]$  实际上是一个非线性矩阵, 它可以写成

$$[K] = [K_l] + [K_{nl}]$$

其中  $[K_l]$  和  $[K_{nl}]$  分别为  $[K]$  的线性部分和非线性部分. 显然, 动力学方程中各矩阵的元素都可以直接由方程(13) 和(14) 获得. 式(15) 构成了输流曲管的非线性动力学方程, 求解此方程可以获取管道各网点处的动力响应情况.

### 3 数值仿真

为了分析环境阻尼及粘弹性系数两个因素对输流曲管动力响应的影响, 采用 Newmark 法和 Newton-Raphson 迭代技术在时间域上对方程(15) 作数值计算. 通过改变环境阻尼及粘弹性系数的取值, 将会清楚的看到二者对系统动力响应所产生的影响. 在以下的数值分析中, 着重研究曲管自由端的动力响应(位移和速度等). 不失一般性, 系统参数选取为

$$\Delta = 10^{-3}, N = 12, \zeta_c = 0.854,$$

$$k = 1000, \beta = 0.50, \theta_0 = 0.75 \pi$$

#### 3.1 环境阻尼对系统动力响应的影响

取  $v = 0.297$ , 研究环境阻尼对系统动力响应的影响. 此时, 仅改变环境阻尼的取值, 其它参数保持恒定, 同时取  $\eta = 0.0001$ . 从方程(11) 中可以看到, 度量环境阻尼的参数是无量纲的强度系数  $\varphi$ . 通过数值计算, 采用文献[8] 的作法, 得到以环境阻尼强度系数为控制参数的分岔图, 如图2 所示.

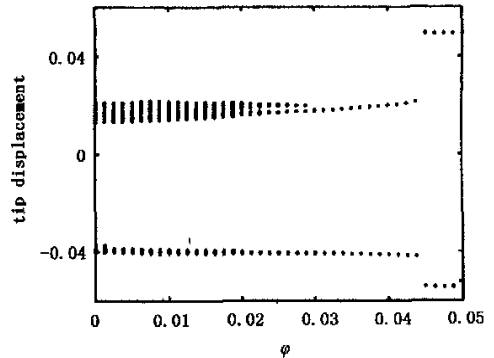


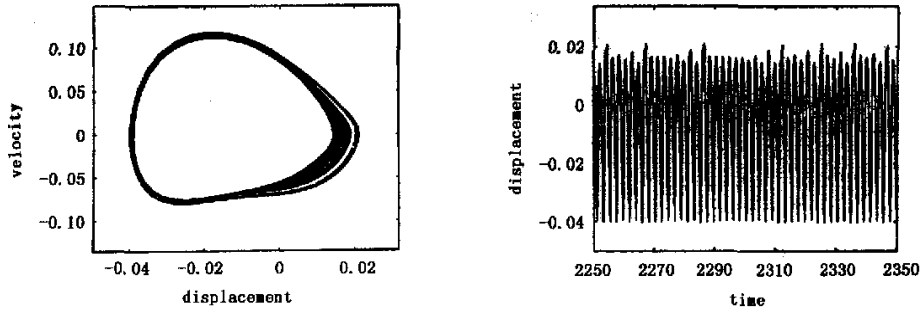
图2  $v = 0.297, \eta = 0.0001$  时, 以  $\varphi$  为控制参数的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram as  $\varphi$  is varied, for  $v = 0.297, \eta = 0.0001$

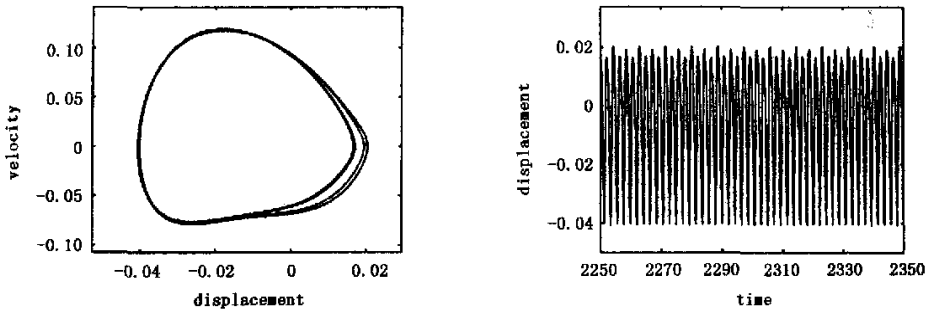
从分岔图中可以看出, 随着  $\varphi$  的连续变化, 曲管的振动形态在某些取值处发生了突变. 当  $\varphi$  较大时(如  $\varphi = 0.05$ ), 系数处于严格的周期1运动; 若  $\varphi$  逐渐减小, 管道自由端的位移幅值会突然变小, 出现跳跃(不连续)的现象. 当  $\varphi = 0.0294$  时, 系统将出现周期2运动; 随着  $\varphi$  的继续减小, 曲管将依

次历经周期 4, 周期 8, ..., 周期  $2^n$  ( $n$  为正整数), 并最终进入混沌运动轨道. 因此, 在  $\varphi$  这一参数区域

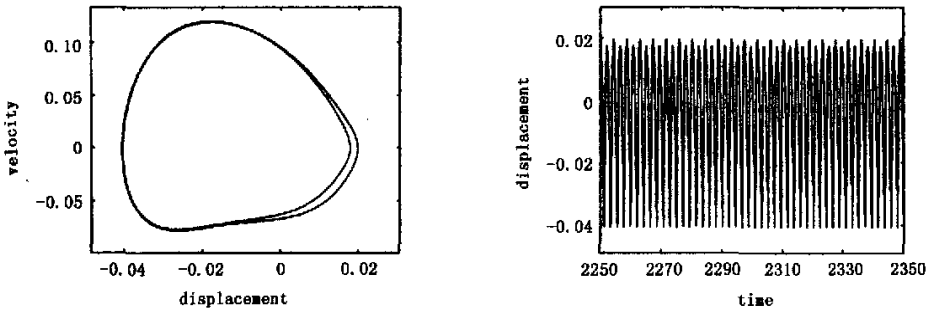
内, 系统是由倍周期分岔通向混沌的. 图 3 给出了其典型运动形态的相轨线和时间历程曲线.



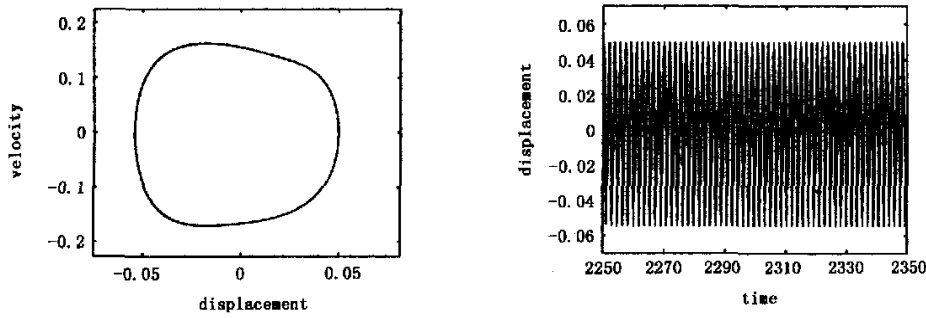
(a)  $\varphi = 0.01$



(b)  $\varphi = 0.023$



(c)  $\varphi = 0.03$



(d)  $\varphi = 0.05$

图 3  $\nu = 0.297, \eta = 0.0001$  时,  $\varphi$  对曲管动力响应的影响

Fig. 3 The effect of environmental damping on the dynamic responses of the curved pipe

for  $\nu = 0.297$  and  $\eta = 0.0001$

### 3.2 粘弹性系数对系统动力响应的影响

类似于前文的作法,可研究粘弹性系数对曲管动力响应的影响,以  $v = 0.297$  为例加以分析.此时,固定环境阻尼的强度系数  $\varphi = 0.001$ ,仅改变粘弹性系数  $\eta$  的取值,其他系统参数的选取与前文一致.通过数值计算发现一个有趣的现象:在参数  $\eta$  区域内,曲管历经了多种运动形式,各种运动形

式之间的转化规律与在参数区域  $\varphi$  内曲管动力响应的变化过程是一致的,即随着粘弹性系数的逐渐减小,系统同样以倍周期分岔的道路通向混沌.这在一定程度上反映了这两种不同的参数对系统的动力响应具有类似的影响.图4显示了在参数  $\eta$  区域内系统的几种典型的动力响应形态.

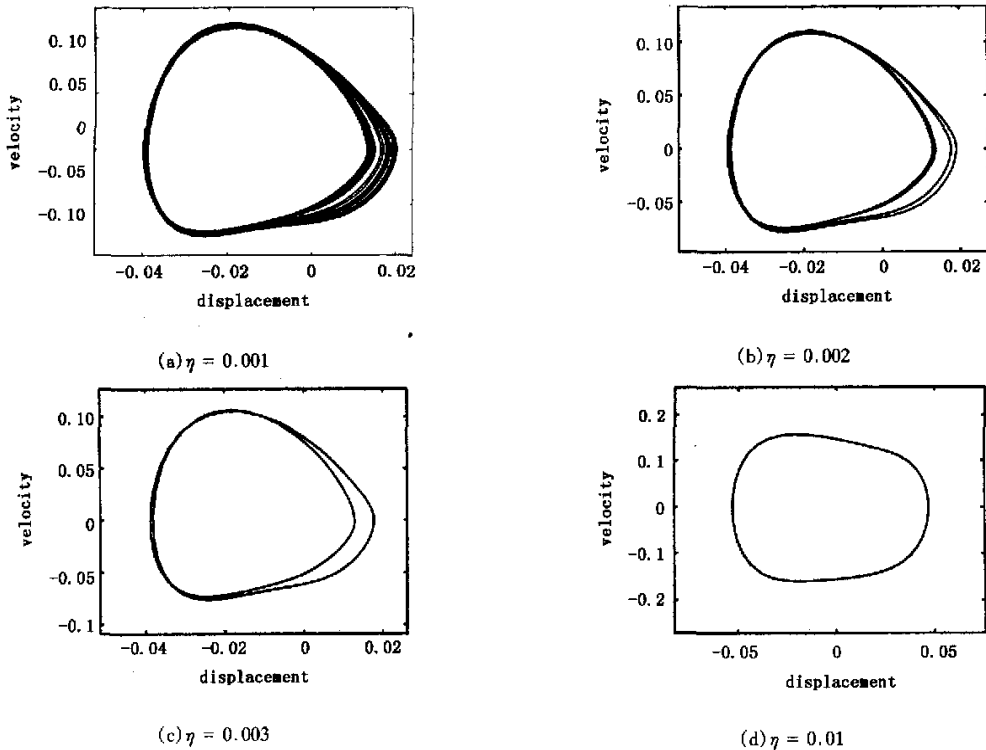


图4  $v = 0.297, \varphi = 0.001$  时,  $\eta$  对曲管动力响应的影响

Fig. 4 The effect of viscoelastic coefficient on the dynamic responses of the curved pipe for  $v = 0.297$  and  $\varphi = 0.001$

## 4 结论

本文针对一种具有运动约束作用的输流曲管模型,考虑环境阻尼和管材的粘弹性效应,研究了系统的非线性动力响应,并发现系统存有包括混沌在内的多种振动形态.数值仿真表明,环境阻尼和粘弹性系数的大小将会对曲管的动力响应产生较大的影响.在工程应用中,输流管道的混沌运动通常是有害的.因此,针对管道系统本身的情况,需合理的考虑管材的粘弹性效应和环境阻尼等因素的影响,以便更准确的预测结构的动力学行为,从而避免混沌运动的发生,确保管道系统的稳定性.

## 参 考 文 献

- 1 Chen SS. Out-of-plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid. *Journal of applied Mechanics*, ASME, 1973, 40:362~368
- 2 Chen SS. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid. *Journal of Acoustical Society of America*, 1972, 51:223~232
- 3 Chen SS. Flow-induced in-plane instabilities of curved pipe. *Nuclear Engineering and Design*, 1972, 23:29~38
- 4 Ko CL, Bert CW. A perturbation solution for non-linear vibration of uniformly curved pipes conveying fluid. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1986, 21:315

~325

- 5 Dupuis C, Rousselet J. The equations of motion of curved pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 153:473~489
- 6 倪樵,王琳.受运动约束输液曲管的非线性振动研究.首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会论文集,成都,2004(Ni Qiao, Wang Lin. The nonlinear vibration of a constrained curved pipe conveying fluid. Proceedings of the 1st Chinese Conference on Mechanical Problem in Aerospace Field, Chengdu, 2004(in Chinese))
- 7 Aithal R, Gipson GS. Instability of damped curved pipes. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1990, 116:77~90
- 8 倪樵.输液管道稳定性与动力特性分析及算法研究[博士学位论文].武汉:华中科技大学,2001(Ni Qiao. Stability, dynamic characteristics and algorithm of pipes conveying fluid[Ph D Thesis]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2001(in Chinese))
- 9 Ni Qiao, Huang Yuying. Differential quadrature method to stability analysis of pipes conveying fluid with spring support. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 13:320~327
- 10 王琳,倪樵.用微分求积法分析输流管道的非线性动力学行为.动力学与控制学报,2004,2(4):56~61(Wang Lin, Ni Qiao. The nonlinear dynamic vibrations of a restrained pipe conveying fluid by differential quadrature method. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 56~61(in Chinese))

## THE CHAOTIC MOTIONS OF A KELVIN-VOIGT TYPE CURVED PIPE CONVEYING FLUID WITH ENVIRONMENTAL DAMPING \*

Wang Lin Ni Qiao Huang Yuying

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract** Considering the environmental damping, this paper investigated the chaotic vibrations of a Kelvin-Voigt type curved pipe conveying fluid subjected to motion-limiting constraint. Numerical simulations indicate that the chaotic vibrations can be induced for certain parameter values of the curved pipe conveying fluid, and the environmental damping and viscoelastic coefficient greatly affect the dynamic responses of the curved pipe. The results provided a reference for tubing and design of pipe system in engineering applications.

**Key words** Kelvin-Voigt type, curved pipe conveying fluid, chaos, viscoelastic coefficient, environmental damping

\* Received 07 March 2005, revised 21 March 2005.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10272051)