第3卷第2期
2005年6月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.3 No.2
Jun. 2005

群表示理论在对称系统 H_2/H_∞ 控制中的一些应用*

吴志刚

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

摘要 利用群论的方法研究系统的对称性,可以将对称系统分解为一系列互相独立的子系统,使系统的 H_2 和 H_∞ 控制可以在低维子系统上设计实现,从而减少控制系统设计中的计算量,这一点对于大规模系统的控制尤其重要.简要介绍了利用系统对称性简化 Lyapunov 方程和 Riccati 方程的求解,以及计算控制系统的范数等几个例题,这些都是 H_2 和 H_∞ 控制中常见的计算问题.

关键词 对称系统,群表示理论,H_2 控制,H_∞ 控制

引言

群论在物理学和化学领域有比较广泛的应用[1],将群论应用于对称结构的静力和动力分析,可以极大地减少计算量[2,3].利用群论的方法研究对称系统的控制问题,也可以使系统的分析和设计工作得以简化[4~6],这是通过其他途径难以做到的.本文将通过具体的例子来介绍群的线性表示理论在对称系统 H_2 和 H_∞ 控制计算中的一些初步应用,结合精细积分方法[7],以尽量少的计算量求解 Riccati 方程、Lyapunov 方程并计算系统范数.

1 线性对称系统

本节给出线性对称系统的定义,然后介绍如何基于群表示理论将对称系统解耦.考虑下列线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \tag{1a}$$

$$z = Cx + D_u u \tag{1b}$$

其中状态向量 $x \in R^n$,控制向量 $u \in R^p$,干扰输入向量 $w \in R^l$,参考输出向量 $z \in R^m$.根据文献[5],当线性系统(1)满足下列条件时,称其为对称系统.

设 G 为一有限群,$\Theta_x: G \to C^{n\times n}$,$\Theta_u: G \to C^{p\times p}$,$\Theta_w: G \to C^{l\times l}$,$\Theta_z: G \to C^{m\times m}$ 为群的么正表示(unitary representations),若对于群的所有元素 $g \in G$,存在

$$A = \Theta_x(g)^* A\Theta_x(g) \tag{2a}$$

$$B_u = \Theta_x(g)^* B_u\Theta_u(g) \tag{2b}$$

$$B_w = \Theta_x(g)^* B_u\Theta_w(g) \tag{2c}$$

$$C = \Theta_z(g)^* C\Theta_x(g) \tag{2d}$$

$$D_u = \Theta_z(g)^* D_u\Theta_u(g) \tag{2e}$$

则系统(1)为对称系统.其中 M^* 表示矩阵 M 的共轭转置.根据群表示论的一个基本定理:有限群 G 的每一个可约表示 $\Theta(g)$ 都存在一个等价的块对角化的表示 $\hat{\Theta}(g)$,且 $\hat{\Theta}(g)$ 中的每一个块都对应于 G 的一个不可约表示.令 $\Omega_1,\cdots,\Omega_J$ 表示群 G 的 J 个互不相等的不可约表示,则有

$$\hat{\Theta}(g) = \bigoplus_{i=1}^{J}(\Omega_i(g) \otimes I_{p_i}) \tag{3}$$

式(3)中的 p_i 代表了 $\Omega_i(g)$ 的重数.式(2)中可约表示矩阵的块对角化可以利用相应的变换矩阵 T_x, T_u, T_w 和 T_z 进行

$$T_x^*\Theta_x(g)T_x = \bigoplus_{i=1}^{J}(\Omega_i(g) \otimes I_{p_i}) \tag{4a}$$

$$T_u^*\Theta_u(g)T_u = \bigoplus_{i=1}^{J}(\Omega_i(g) \otimes I_{r_i}) \tag{4b}$$

$$T_z^*\Theta_z(g)T_z = \bigoplus_{i=1}^{J}(\Omega_i(g) \otimes I_{q_i}) \tag{4c}$$

$$T_w^*\Theta_w(g)T_w = \bigoplus_{i=1}^{J}(\Omega_i(g) \otimes I_{s_i}) \tag{4d}$$

其中的 $\otimes$ 表示 Kronecker 积,$\oplus$ 表示直和.上述么正矩阵 T_x, T_u, T_w 和 T_z 可以由群论中的标准算法计算.并可以利用这些么正矩阵组成的变换阵将原对称系统矩阵变换为下列块对角化形式

$$\tilde{A} = \bigoplus_{i=1}^{J}(\tilde{A}_i \otimes I_{n_i}) \tag{5a}$$

2004-10-29 收到第1稿.
*国家自然科学基金资助项目(10202004)

$$\tilde{B}_u = \bigoplus_{i=1}^{l}(\tilde{B}_{ui} \otimes I_{n_i}) \tag{5b}$$

$$\tilde{B}_w = \bigoplus_{i=1}^{l}(\tilde{B}_{wi} \otimes I_{n_i}) \tag{5c}$$

$$\tilde{C} = \bigoplus_{i=1}^{l}(\tilde{C}_i \otimes I_{n_i}) \tag{5d}$$

$$\tilde{D}_u = \bigoplus_{i=1}^{l}(\tilde{D}_{ui} \otimes I_{n_i}) \tag{5e}$$

其中 $\tilde{A}_i \in C^{p_i \times p_i}, \tilde{B}_{ui} \in C^{p_i \times r_i}, \tilde{B}_{wi} \in C^{p_i \times s_i}, \tilde{C}_i \in C^{q_i \times p_i}, \tilde{D}_{ui} \in C^{q_i \times r_i}$,这种情况下各子系统($\tilde{A}_i, \tilde{B}_{ui}, \tilde{B}_{wi}, \tilde{C}_i, \tilde{D}_{ui}$)之间互相独立.坐标变换的实质是得到了系统的一个新状态空间实现,因此这种变换并不改变系统的可控性、可观性及系统的 H_2 和 H_∞ 范数,但却可以使控制系统设计时的计算量大大减少,尤其是对于大规模对称系统而言.下面将介绍一些具体的应用.

2 Lyapunov 方程及系统的 H_2 范数

线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + B_u u \tag{6a}$$

$$y = Cx \tag{6b}$$

是系统(1) 当 $B_w = 0, D_u = 0$,时的情形.系统(6)由 u 到 y 的 H_2 范数定义为[8]

$$\| Q \|_w = \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(t)g(t)]\mathrm{d}t} \tag{7}$$

其中的 $g(t) = Ce^{At}B_u$ 为系统的脉冲传递函数,trace 表示矩阵的迹.据此,H_2 范数还可以表达为

$$\| Q \|_2 = \sqrt{\mathrm{trace}(CL_cC^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\mathrm{trace}(B_u^{\mathrm{T}}L_oB_u)} \tag{8}$$

式(8) 中的 L_c 和 L_o 分别为可观性和可控性 Grammian 矩阵,并分别满足下列 Lyapunov 方程

$$AL_c + L_cA^{\mathrm{T}} = -B_uB_u^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$A^{\mathrm{T}}L_o + L_oA = -C^{\mathrm{T}}C \tag{10}$$

因此求解上述 Lyapunov 方程就可以得到系统的 H_2 范数.当然 Lyapunov 方程的意义并不仅在于此,在系统的稳定性分析等方面也有重要的意义.

Lyapunov 方程的求解方法很多,例如精细积分方法[7] 以及 MATLAB 工具箱中的函数等.但是,当系统规模比较大时,无论那种方法的计算量都是比较大的.如果该大规模系统满足式(2) 所定义的对称性,则可以基于群的线性表示理论通过坐标变换得到系统在对称坐标系上的状态空间实现

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_u\tilde{u} \tag{11a}$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \tag{11b}$$

由于 $\tilde{A}, \tilde{B}_u, \tilde{C}$ 具有块对角形式,因此系统矩阵被解耦为多个相互独立的子系统,相应的 Lyapunov 方程

$$\tilde{A}\tilde{L}_c + \tilde{L}_c\tilde{A}^{\mathrm{T}} = -\tilde{B}_u\tilde{B}_u^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{L}_o + \tilde{L}_o\tilde{A} = -\tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{C} \tag{13}$$

的解 $\tilde{L}_c$ 和 $\tilde{L}_o$ 也具有分块对角的形式,可以按块分别独立求解,从而减少计算量.对 $\tilde{L}_c$ 和 $\tilde{L}_o$ 进行逆变换就可得到系统在原坐标系下的解 L_c 和 L_o.同时,系统的 H_2 范数也可以按照式(8) 计算,如文献[5]中所述.

3 Riccati 方程求解

线性系统(6) 的状态反馈最优控制中需要求解下列形式的 Riccati 方程[8]

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PB_uB_u^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C = 0 \tag{14}$$

与上一节中 Lyapunov 方程的求解类似,利用系统的对称性,采用同样的坐标变换,可以得到新对称坐标系内的 Riccati 方程

$$\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{P} - \tilde{P}\tilde{B}_u\tilde{B}_u^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{C} = 0 \tag{15}$$

矩阵 $\tilde{A}, \tilde{B}_u, \tilde{C}$ 的块对角形式使得原来大规模的 Riccati 方程可以分解为几个独立的较小规模的 Riccati 方程,从而降低数值求解的工作量.原方程的解仍可通过逆变换得到,并导出原系统的反馈增益矩阵.

有限时间最优控制问题需要求解 Riccati 微分方程

$$-\dot{P} = PA + A^{\mathrm{T}}P - PB_uB_u^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C, P(t_f) = 0 \tag{16}$$

此方程也可以用同样的坐标变换方法解耦后求解,对于 H_∞ 控制和滤波中的 H_∞-Riccati 方程也有类似的处理方法,这里不再赘述.

现在通过一个 Riccati 代数方程求解的例题来具体说明所介绍的内容(例题取自文献[5]):系统矩阵给定为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{B}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

此时 Riccati 代数方程(15) 的解为

$$
\boldsymbol{P} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 7.2148 & 1.0066 & -1.1153 & -0.8595 & -1.1153 & -0.8595 \\ 1.0066 & 0.7756 & -0.8595 & -0.0904 & -0.8595 & -0.0904 \\ -1.1153 & -0.8595 & 7.2148 & 1.0066 & -1.1153 & -0.8595 \\ -0.8595 & -0.0904 & 1.0066 & 0.7756 & -0.8595 & -0.0904 \\ -1.1153 & -0.8595 & -1.1153 & -0.8595 & 7.2148 & 1.0066 \\ -0.8595 & -0.0904 & -0.8595 & -0.0904 & 1.0066 & 0.7756 \end{bmatrix}
$$

上述系统矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_u, \boldsymbol{B}_w, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}_u$ 满足对称性条件(2),变换矩阵依据 $\boldsymbol{S}_3$ 群的表示矩阵构成

$$
\widetilde{\boldsymbol{T}}_x = \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{I}_2, \widetilde{\boldsymbol{T}}_w = \widetilde{\boldsymbol{T}}_u = \widetilde{\boldsymbol{T}}_z = \boldsymbol{T}
$$

其中

$$
\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \\ 1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) & -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \end{bmatrix}
$$

变换后的矩阵为

$$
\widetilde{\boldsymbol{A}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}_x^* \widetilde{\boldsymbol{A}} \widetilde{\boldsymbol{T}}_x =
$$

$$
\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_1 & & \\ & \widetilde{\boldsymbol{A}}_2 & \\ & & \widetilde{\boldsymbol{A}}_3 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},
$$

$$
\widetilde{\boldsymbol{B}}_u = \widetilde{\boldsymbol{T}}_x^* \widetilde{\boldsymbol{B}}_u \widetilde{\boldsymbol{T}}_u = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{B}}_{u1} & & \\ & \widetilde{\boldsymbol{B}}_{u2} & \\ & & \widetilde{\boldsymbol{B}}_{u3} \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},
$$

$$
\widetilde{\boldsymbol{B}}_w = \widetilde{\boldsymbol{T}}_x^* \widetilde{\boldsymbol{B}}_w \widetilde{\boldsymbol{T}}_w = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{B}}_{w1} & & \\ & \widetilde{\boldsymbol{B}}_{w2} & \\ & & \widetilde{\boldsymbol{B}}_{w3} \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\widetilde{\boldsymbol{C}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}_y^* \boldsymbol{C} \widetilde{\boldsymbol{T}}_x = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{C}}_1 & & \\ & \widetilde{\boldsymbol{C}}_2 & \\ & & \widetilde{\boldsymbol{C}}_3 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\widetilde{\boldsymbol{D}}_u = \widetilde{\boldsymbol{T}}_y^* \widetilde{\boldsymbol{D}}_u \widetilde{\boldsymbol{T}}_x = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{D}}_{u1} & & \\ & \widetilde{\boldsymbol{D}}_{u2} & \\ & & \widetilde{\boldsymbol{D}}_{u3} \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

各矩阵具有块对角化的结构,系统解耦为 3 个互相独立的子系统,对应 Riccati 方程的解也具有如下分块对角结构

$$
\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{P}}_1 & & \\ & \widetilde{\boldsymbol{P}}_2 & \\ & & \widetilde{\boldsymbol{P}}_3 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 4.9842 & -0.7123 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7123 & 0.5948 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.3301 & 1.8660 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8660 & 0.8660 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.3301 & 1.8660 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8660 & 0.8660 \end{bmatrix}
$$

其中的各子块分别满足

$$\tilde{P}_1\tilde{A}_1+\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}\tilde{P}_1-\tilde{P}_1\tilde{B}_{u1}\tilde{B}_{u1}^{\mathrm{T}}\tilde{P}_1+\tilde{C}_1^{\mathrm{T}}\tilde{C}_1=0 \tag{17a}$$

$$\tilde{P}_2\tilde{A}_2+\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}\tilde{P}_2-\tilde{P}_2\tilde{B}_{u2}\tilde{B}_{u2}^{\mathrm{T}}\tilde{P}_2+\tilde{C}_2^{\mathrm{T}}\tilde{C}_2=0 \tag{17b}$$

$$\tilde{P}_3\tilde{A}_3+\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}\tilde{P}_3-\tilde{P}_3\tilde{B}_{u3}\tilde{B}_{u3}^{\mathrm{T}}\tilde{P}_3+\tilde{C}_3^{\mathrm{T}}\tilde{C}_3=0 \tag{17c}$$

可独立求解,而第二和第三个子块完全一样,只求解一个子块就可以,即方程(17b)和(17c)实际上是相同的,只需求解其中之一.并且,利用 $\tilde{P}=\tilde{T}_x^*\tilde{P}\tilde{T}_x$ 就可以得到坐标变换前Riccati方程的解.

4 系统的最优 H_∞ 范数与Hamilton微分系统特征值

对于一般闭环大系统的最小 H_∞ 范数计算问题,可以首先将系统分解为多个子系统,分别计算其最小 H_∞ 范数,再考虑子系统之间的耦合条件,利用Hamilton体系的模态综合方法计算整个系统的最小 H_∞ 范数[9].如果系统满足式(2)所定义的对称性,则可以基于群的表示理论,通过坐标变换将系统解耦为独立的子系统.经过这样的变换后,所有子系统的最小 H_∞ 范数中最大的值就是大系统系统的最小 H_∞ 范数,这一结论是基于系统的最小 H_∞ 范数与相关Hamilton系统的最小特征值之间存在的对应关系[7].

对于系统(1),若初始条件为 $x(0)=0$,并且给定 $D_u^{\mathrm{T}}D_u=I, C^{\mathrm{T}}D_u=0$,其 H_∞ 状态反馈控制器设计的优化指标为

$$\int_0^{t_f} z^{\mathrm{T}}z\mathrm{d}t+x^{\mathrm{T}}(t_f)S_fx(t_f)<\gamma^2\int_0^{t_f}w^{\mathrm{T}}w\mathrm{d}t \tag{18}$$

设其中的 $S_f=I_m$.则当且仅当下列Riccati微分方程

$$-\dot{P}=A^{\mathrm{T}}P+PA+C^{\mathrm{T}}C-P(B_uB_u^{\mathrm{T}}-\gamma^{-2}B_uB_w^{\mathrm{T}})P, P(t_f)=S_f \tag{19}$$

有解时,存在满足条件(18)的 H_∞ 控制器[8].确保式(19)有解的 γ 有一个下界,此下界是闭环控制系统的最小 H_∞ 范数 $\gamma_{\min}$,这个 $\gamma_{\min}$ 可以通过计算下列Hamilton微分方程边值问题的最小特征值 γ_1^{-2} 得到[7]

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A & -(B_uB_u^{\mathrm{T}}-\gamma^{-2}B_wB_w^{\mathrm{T}})\\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix}x\\ \lambda\end{Bmatrix}, \begin{matrix}x(0)=0\\ \lambda(t_f)=S_fx(t_f)\end{matrix} \tag{20}$$

若系统具有式(2)所定义的对称性,且系统矩阵已经过变换化为分块对角形式,则其对应的Hamilton方程为

$$\begin{Bmatrix}\dot{\tilde{x}}\\ \dot{\tilde{\lambda}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A} & -(\tilde{B}_u\tilde{B}_u^{\mathrm{T}}-\gamma^{-2}\tilde{B}_u\tilde{B}_w^{\mathrm{T}})\\ -\tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{C} & -\tilde{A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{\lambda}\end{Bmatrix} \tag{21}$$

因为方程中矩阵各对角块互相独立,可将Hamilton方程分解为下列 J 个互不相同的、规模较小的Hamilton方程

$$\begin{Bmatrix}\dot{\tilde{x}}_i\\ \dot{\tilde{\lambda}}_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_i & -(\tilde{B}_u\tilde{B}_{ui}^{\mathrm{T}}-\gamma^{-2}\tilde{B}_u\tilde{B}_{ui}^{\mathrm{T}})\\ -\tilde{C}_i^{\mathrm{T}}\tilde{C}_i & -\tilde{A}_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{x}_i\\ \tilde{\lambda}_i\end{Bmatrix} \tag{22}$$

其中 $i=1,2,\cdots,J$ 注意上述方程是互不相同的,而由于块对角化矩阵中可能存在重复的子块(例如上一节的例题),可能得出 n_i 个相同的Hamilton方程,但求解只需对不同的Hamilton方程进行就可以了.边界条件也需做同样的坐标变换.

仍利用第三节例题中的系统矩阵数据来计算.令 $t_f=1$,计算Hamilton系统(20)的一阶特征值,进而得到原系统的最小 H_∞ 范数 $\gamma_{\min}=1.8229$,而分别计算解耦的3个小规模(其中两个相同)Hamilton系统的一阶特征值后可以得到 $\gamma_{1,\min}=1.8229, \gamma_{2,\min}=\gamma_{3,\min}=1.6424$,显然 $\gamma_{\min}=\max\{\gamma_{1,\min},\gamma_{2,\min},\gamma_{3,\min}\}$.改变计算参数,令 $t_f=2$,求得原系统的最小 H_∞ 范数 $\gamma_{\min}=2.2695$;解耦系统的计算结果为 $\gamma_{1,\min}=2.2695, \gamma_{2,\min}=\gamma_{3,\min}=1.6438$,同样满足 $\gamma_{\min}=\max\{\gamma_{1,\min},\gamma_{2,\min},\gamma_{3,\min}\}$.数值计算的结果与理论相符.

5 结束语

由于许多控制对象的规模越来越大,仅依靠现有的控制算法难以有效地处理这类系统的控制问题,因此需要充分利用系统的对称性等固有特性来设计新的控制方案,当然有些对称性并不很直观,这就需要借助于群论这一研究系统对称性的数学工具进行分析[1,2].本文只是介绍了群的线性表示理论在求解 H_2 和 H_∞ 控制某些计算问题时的一些初步应用,更多的问题还有待深入的研究.

参 考 文 献

1 马中骐.物理学中的群论.北京:科学出版社,1998(Ma Zhongqi. Group Theory in Physics. Beijing: Science Press, 1998(in Chinese))

2 钟万勰,裘春航,程耿东.群论在结构分析中的应用.力学学报,1978,10(4):251～267(Zhong Wanxie, Qiu Chunhang, Cheng Gengdong. Application of group theory in structural analysis. *Acata Mechanica Sinica*, 1978, 10(4):251～267.(in Chinese))

3 Healey TJ, Treacy JA. Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991,31(2):265～285

4 Tanaka R, Murota K. Quantitative analysis for controllability of symmetric control systems. *International Journal of Control*, 2000, 73:254～264

5 Cogill R, Lall S, Parrilo PA. On structured semidefinite programs for the control of symmetric systems. Proceedings Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, USA, 2003, 1536～1545

6 吴志刚.大型柔性对称结构的主动控制.首届航空航天领域中的力学问题学术研讨会论文集,成都,2004,236～239(Wu Zhigang. Proceedings of the 1st Conference on Mechanics Problems in Aeronautical and Astronautical Engineering, Chengdu, China, 2004, 236～239(in Chinese))

7 钟万勰.应用力学对偶体系.北京:科学出版社,2002(Zhong Wanxie. Duality Method in Applied Mechanics. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))

8 Green M, Limebeer DJN. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995

9 Zhong WX, Wu ZG, Gao Q, Leung AYT, Williams FW. Modal synthesis method for decentralized control. Proceedings of the Fifth International Conference on Vibration Engineering(II), Nanjing, China, 2002, 762～770

APPLICATION OF GROUP REPRESENTATION THEORY IN H_2/H_∞ CONTROL OF SYMMETRIC SYSTEMS *

Wu Zhigang

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract Symmetric systems can be transformed into uncoupled subsystems by using the group representation theory, which can reduce the computational effort required for H_2 and H_∞ control of the systems, especially for large scale systems whose controllers are synthesized directly for subsystems with lower dimensions. This paper presented several computational problems in H_2 and H_∞ controllers design to demonstrate the point that the use of symmetry can decrease the computational requirements, e.g. computation of control systems norm and solutions of Lyapunov equations and Riccati equations.

Key words symmetric systems, group representation theory, H_2 control, H_∞ control

Received 29 October 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10202004)