

复合材料层合板非线性热振动分析*

刘芹 任建亭 姜节胜 郭运强 陈换过

(西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

摘要 采用有限元方法研究复合材料层合板结构在线性温度场作用下非线性热振动特性. 采用特征值屈曲分析方法, 判断了结构在线性温度场作用下的临界屈曲分枝点, 计算了结构的一阶弯曲固有频率, 分析了铺层角度及铺层层数对结构临界屈曲温度分布和结构固有频率的影响, 总结了其对复合材料层合板结构热振动特性影响的一般规律. 这些结论对复合材料结构设计、抗热设计有一定的指导意义.

关键词 复合材料层合板, 热振动, 热屈曲, 几何非线性

引言

薄板结构特别是复合材料层合板结构在航空航天、石油化工、机械等方面有着广泛的应用. 工程实际中大量的复合材料层合板经常受到热载荷的影响, 直接影响结构的动力特性. 当热载逐渐增大, 到达(或超过)某临界值时, 结构会发生屈曲. 计算结构的热振动特性, 应判断结构的热屈曲临界载荷, 超出临界载荷, 结构进入后屈曲阶段.

文献[1~4]研究了材料性质不随温度变化的复合材料层合板的热屈曲问题. 文献[5]给出了当材料性质与温度有关时复合材料层合板热屈曲问题非线性有限元分析方法. Chen LW 等^[6]则基于 Mindlin 理论研究了温湿环境下复合材料层合板的自由振动和强迫振动, 但文中未考虑几何非线性的影响. 文献[7,8]给出了非线性高阶层合理论和非线性热振动分析有限元算法及实验验证, 但未涉及热屈曲的判定. 本文基于 Mindlin-Reissner 板壳理论的有限元法, 考虑材料性质随温度变化的影响, 应用 ANSYS 的 APDL 宏语言实现了对复合材料层合板结构的屈曲临界和振动特性的研究. 总结了温度效应、铺层角度及铺层层数对复合材料层合板结构振动特性影响的一般规律.

1 热振动有限元分析方法

以板单元为例, 结构受热载荷而发生变形, 考虑几何非线性影响, 薄板振动变形的应变-位移关

系^[9]为(见图1):

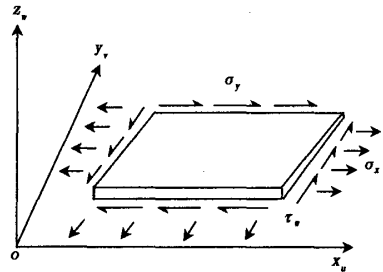


图1 板单元

Fig.1 Plate element

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

而该应变为弹性应变和热应变之和, 即

$$\epsilon = \epsilon_E + \epsilon_T \quad (2)$$

单层薄板单元的弯曲应变能

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV_e$$

即

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\{\epsilon\} - \{\epsilon\}_T)^T [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon\}_T) dV_e =$$

$$\frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV_e -$$

2004-12-14 收到第1稿, 2004-12-30 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10202020, 10072050)和航天创新基金资助项目

$$\int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e + \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e \quad (3)$$

若结构只受热载而不受外载作用,无外力势能,则据势能极小原理

$$\delta U^e = 0$$

即

$$\frac{1}{2} \int_{V_e} \delta \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dv_e - \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e + \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e = 0 \quad (4)$$

这里,应变和单元节点位移关系为

$$\epsilon = B d_e \quad (5)$$

式中 B 为应变矩阵,从 ϵ 表达式可以证明相应的 B 和 ϵ 可表示为线性部分和非线性部分之和,且非线性应变矩阵 B_{NL} 是 d_e 的齐一次函数^[10],即

$$B = B_L + \frac{1}{2} B_{NL}$$

$$\epsilon = \epsilon_L + \epsilon_{NL} = B_L d_e + \frac{1}{2} B_{NL} d_e \quad (6)$$

并有如下的线性性质

$$\delta B_{NL}(d_e) = B_{NL}(\delta d_e)$$

$$B_{NL}(\delta d_e) \cdot d_e = B_{NL}(d_e) \cdot \delta d_e \quad (7)$$

将式(6)带入式(5)并利用式(7)的性质得

$$\delta \epsilon = (B_L + B_{NL}) \delta d_e \quad (8)$$

再将式(8)带入式(4)得

$$\frac{1}{2} \int_{V_e} \{B_L + B_{NL}\}^T [D] \{B_L + \frac{1}{2} B_{NL}\} dv_e - \int_{V_e} \{B_L + B_{NL}\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e + \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e = 0 \quad (9)$$

令

$$k_0^e = \int_{V_e} [B_L]^T [D] [B_L] dv_e;$$

$$k_\sigma^e \delta^\sigma = \int_{V_e} [B_{NL}]^T \sigma dv_e;$$

$$k_{NL}^e = \int_{V_e} [B_L]^T D B_{NL} dv_e;$$

$$\{Q\}_T^e = \int_{V_e} [B_L + B_{NL}]^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e;$$

$$C = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}_T dv_e$$

整理得矩阵表达式

$$(k_0^e + k_\sigma^e + k_{NL}^e) \{d_e\} = \{Q\}_T^e \quad (10)$$

可以看出: k_0^e 是通常的薄板单元线性刚度矩阵, k_σ^e 是薄板单元的初应力或几何刚度矩阵, k_{NL}^e 是薄板单元的大位移刚度矩阵, Q_e 为单元受热膨胀而引起的相当热载, C 只与单元温升有关,不显含节点位移 $\{\delta^e\}$,因而与以后变分无关.

经组装得整体平衡方程

$$K \{d\} = \{Q\}^T \quad (11)$$

在稳态温度场下,不考虑阻尼影响的系统自由振动方程为

$$M \ddot{x} + Kx = 0 \quad (12)$$

其中 $K = K_0 + K_\sigma + K_{NL}$.

非线性方程(12)的求解方法很多,本文采用 Newton-Raphson(即 N-R)法求解.当结构发生屈曲后,则采用给定路径的弧长法,即采用 N-R 法的同时,还预先给定增量步所走的平衡路径的弧长,使其逼近极值点时避免出现 K 奇异^[10,11],从而求得结构固有特性.

2 热屈曲临界温度的判定

结构的热屈曲临界载荷问题是特征值问题.全 Lagrange 列式法^[11] 屈曲判定准则为

$$|K_0 + K_\sigma + K_{NL}| = 0 \quad (13)$$

在线性屈曲的情况下,大位移刚度矩阵 K_{NL} 应为零.故式(13)简化为

$$|K + K_\sigma| = 0 \quad (14)$$

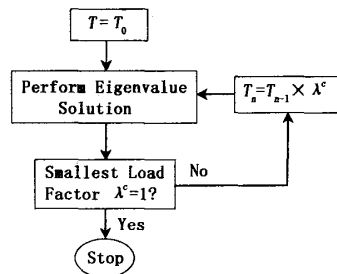


图 2 临界屈曲温度求解流程

Fig. 2 Flow process chart of critical buckling temperature

令某一参考载荷 F^r 对应的初应力刚度阵为 K_σ^r , 屈曲极值载荷为 $F^c = \lambda^c F^r$, λ^c 为极值载荷比例因子.

极值载荷时的初应力刚度阵为

$$K_g^c = \lambda^c K_g^r$$

带入式(14)有

$$[K + \lambda^c K_g^r] = 0 \tag{15}$$

程序求解过程见流程图 2.

3 算例分析及讨论

算例 1 温度效应的影响

分析对象为 4 层十字交叉铺层 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 的玻璃环氧树脂复合材料层合板. 试件几何尺寸为:长 $a = 150 \text{ mm}$,宽 $b = 100 \text{ mm}$,厚度 $h = 2 \text{ mm}$. 结构边界约束为:长度方向两端固支,宽度方向两端自由. 加载状况为:固支边界一端保持常温,另一端温度可以变化,沿板长方向温度呈线性分布,(以下算例均按此约束加载). 表 1 为材料参数.

表 1 玻璃环氧树脂材料参数

Table 1 Physical properties of glass/epoxy

Case		20 °C	150 °C
Young's modulus /(E/GPa)	E_{11}	38.6	38.0
	$E_{22} = E_{33}$	8.27	8.10
Shear modulus /(G/GPa)	$G_{12} = G_{13}$	4.14	4.00
	G_{23}	2.95	2.90
Thermal conductivity coefficient/($k/W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)	k_1	5	/
	$k_2 = k_3$	1	/
Thermal expansion coefficient/($\alpha/10^{-6} \cdot ^\circ C^{-1}$)	α_1	8.6	/
	$\alpha_2 = \alpha_3$	22.1	/

图 3 为求解临界屈曲温度的收敛曲线. 从图中可以看出:当变温端温度为 76.8 °C 时,载荷系数 λ^c 约等于 1,则 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 铺层的一阶屈曲临界温度约为 76.8 °C.

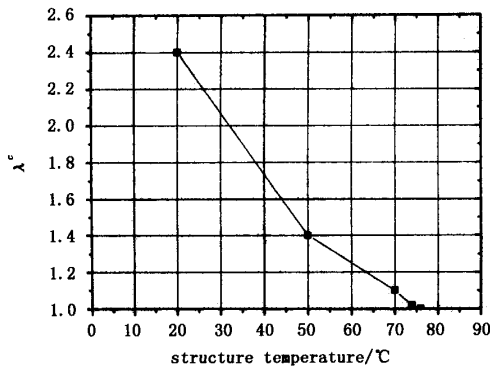


图 3 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 层合板临界屈曲温度

Fig.3 Critical buckling temperature of laminate $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$

图 4 为温度对 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 铺层层合板的一阶固有频率影响曲线. 从图中可以看出:随着温度升高,结构的一阶固有频率显著降低;当变温端温度达 76.84 °C 时固有频率出现零值,且在临界温度附近频率值出现非单调现象,这是由于结构发生一阶弯曲屈曲的缘故.

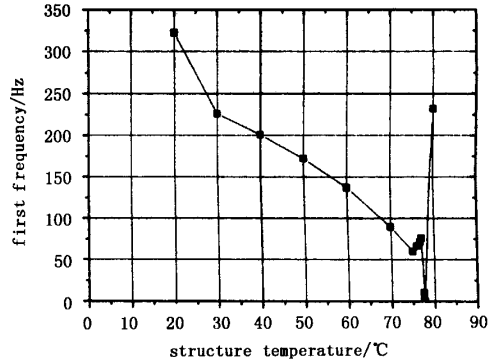


图 4 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 层合板一阶频率

Fig.4 Curve of first nature frequency of laminate $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$

算例 2 铺层角度的影响

铺层为两种状况:交叉铺层 $[0/a/0/a]$ 和反交叉 $[0/a/0/a]$ (其中 α 从 $0^\circ \sim 90^\circ$ 变化).

由图 5 可以看出:

- 1) 铺层角对结构的临界屈曲温度分布有着显著的影响. 随着铺层角 α 的增大,两类铺层结构的临界屈曲温度均降低.
- 2) 不同铺层方式对结构临界屈曲温度分布的影响程度是不同的. 随着 α 的增大,反对称铺层结构的临界屈曲温度下降的幅度较交叉铺层大.
- 3) 当 $\alpha < 40^\circ$ 时反对称铺层较交叉铺层的临

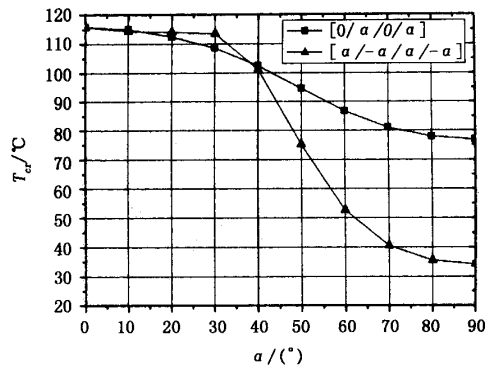


图 5 临界屈曲温度分布 (T_{cr})

Fig.5 Critical buckling temperature distribution (T_{cr})

界屈曲温度高,而当 $\alpha > 40^\circ$ 时反对称铺层的临界屈曲温度显著降低, α 越大,两类铺层临界屈曲温度差别越大。

图 6 和图 7 分别是两类铺层在变温端温度分别为 50°C , 75°C , 100°C 时结构的一阶频率随铺层角度 α 的变化曲线。

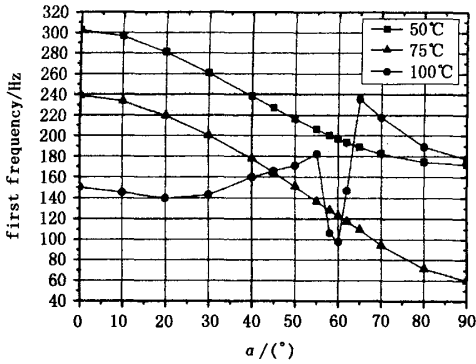


图 6 $[0/a/0/a]$ 一阶频率

Fig. 6 Curve of first nature frequency of $[0/a/0/a]$

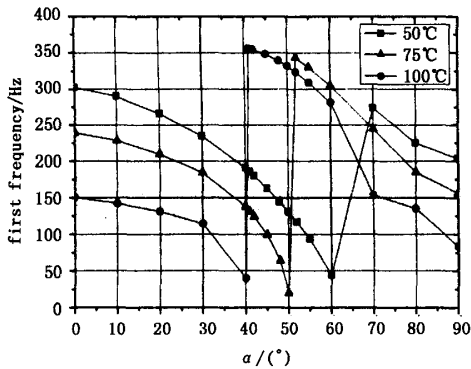


图 7 $[a/-a/a/-a]$ 一阶频率

Fig. 7 Curve of first nature frequency of laminate $[a/-a/a/-a]$

从图 6 和图 7 中可以看出:

1) 温度对复合材料层合板的固有频率有显著的影响。随着温度升高但未达屈曲临界时,结构的一阶固有频率明显降低,而当温度超过屈曲临界值,结构的固有频率急剧增大,其原因是结构发生屈曲后结构产生大变形,结构出现应力刚化的缘故。

2) 比较图 6,图 7 可以看出:

① 在变温端温度为 50°C , 75°C 时, $[0/a/0/a]$ 铺层的一阶频率随 α 的增大单调下降,而 100°C 时则出现非单调现象;这是由于 $[0/a/0/a]$ 铺层在变温度端温度为 50°C , 75°C 时结构随 α 的增大未发生

屈曲,而当变温端温度为 100°C ,铺层角度 α 约达 60° 时结构发生了屈曲,故结构的一阶固有频率值发生突变,出现非单调现象。

② $[a/-a/a/-a]$ 铺层的一阶频率随 α 的增大在 3 种温度场作用下均为非单调变化。在变温端温度分别为 50°C , 75°C , 100°C ;铺层角分别约为 60° , 50° , 40° 时结构发生屈曲,故频率值显著增大。

图 6 和图 7 表明:铺层角度和铺层方式对结构固有频率的影响亦非常显著。 $[a/-a/a/-a]$ 铺层的固有频率受 α 的影响较 $[0/a/0/a]$ 铺层明显得多。

算例 3 铺层层数的影响

结构厚度不变,分析对象为 $[0^\circ/90^\circ]_n$ 和 $[45^\circ/-45^\circ]_n$ 铺层的层合板结构,层数 n 从 4 ~ 20 变化。

图 8 显示:对于 $[0^\circ/90^\circ]_n$ 和 $[45^\circ/-45^\circ]_n$ 铺层,在厚度不变的情况下,临界屈曲温度随着铺层层数的增加而呈上升趋势,在层数较少时,增加的幅度明显,当层数较多 ($N > 10$) 时,增加的幅度趋于平缓。

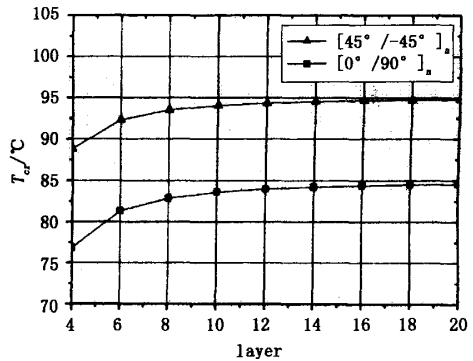


图 8 临界屈曲 (T_{cr}) 随层数变化

Fig. 8 Critical buckling temperature vs. layers

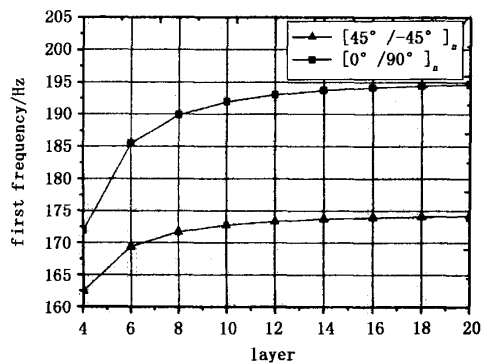


图 9 变温端温度 $T = 50^\circ\text{C}$ 一阶固有频率

Fig. 9 Curve of first nature frequency vs. layers under $T = 50^\circ\text{C}$

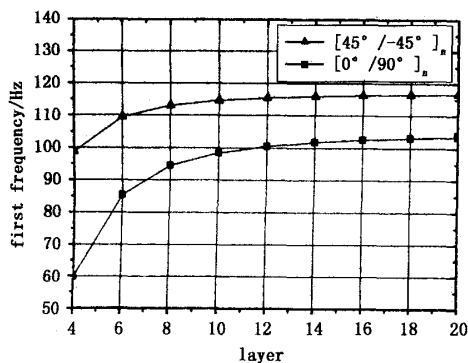


图10 变温端温度 $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 一阶固有频率

Fig. 10 Curve of first nature frequency vs. layers under $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$

从图9和图10可以看出,铺层层数影响结构的一阶固有频率,在给定的线性温度场作用下,随着铺层层数的增加,结构的一阶固有频率升高,层数较少时,频率值增大幅度较大,在层数较多时($N > 10$),频率值变化平缓.这一结果符合许多研究者得到的 $N \geq 8$ 的层板可以近似视为正交各项异性板的结论^[12].

4 结束语

温度对振动特性的影响归根结底是通过结构刚度的影响来实现的.加热可从两方面削弱结构刚度,一是减小材料弹性模量,二是温度梯度产生的内应力导致刚度变化.本文基于热振动有限元的算法,考虑材料参数随温度变化的影响,对不同铺层复合材料层合板结构在不同线性温度场作用下的热屈曲和固有频率进行了有限元数值计算.数值算例结果表明:温度对复合材料层合板结构固有频率有着显著的影响;不同铺层方式、铺层角度和铺层层数对结构的临界屈曲温度分布和一阶固有频率亦有显著影响.这些结论将对复合材料结构设计、抗热设计有一定的指导意义.

参 考 文 献

- 1 Chen LW, Chen LY. Thermal buckling of laminated composite plates. *Journal Thermal Stresses*, 1987, 10: 345 ~ 356
- 2 Thangaratham KR, Ramachandran J. Thermal buckling of composite laminated plates. *Computer and Structure*,

1989, 32: 1117~1124

- 3 Chen WJ, Lin PD, Chen LW. Thermal buckling behavior of composite laminated plates with a circular hole. *Composite Structures*, 1991, 18: 379~397
- 4 Chen WC, Lin WH. Thermal buckling of antisymmetric angle-ply laminated plates-an analytic levy-type solution. *Journal Thermal Stresses*, 1993, 16: 401~406
- 5 郭兆璞 陈浩然. 复合材料层合板非线性热屈曲分析. 大连理工大学学报, 1995, 35(5): 463~467 (Guo Zhaopu, Chen Haoran. Thermal buckling analysis of laminated plates with temperature-dependent material properties. *Journal of Dalian University of technology*, 1995, 35(4): 463~467(in Chinese))
- 6 Chen LW, Chen YM. Vibration of hygro thermal elastic composite plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 1988, 31(2): 209~220
- 7 杨自春. 受热复合材料层合板的非线性热振动——Part I: 理论及数值分析. 复合材料学报, 2000, 17(2): 74~78 (Yang Zichun. Nonlinear thermal vibration of composite laminated plates——Part I: Theory and numerical analysis. *Journal of Acta Materiae Composite Sinica*, 2000, 17(2): 74~78(in Chinese))
- 8 杨自春. 受热复合材料层合板的非线性热振动——Part II: 实验研究. 复合材料学报, 2000, 17(2): 119~122 (Yang Zichun. Nonlinear thermal vibration of composite laminated plates——Part II: Test. *Journal of Acta Materiae Composite Sinica*, 2000, 17(2): 119~122 (in Chinese))
- 9 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 北京: 水利电力出版社, 1979 (Zhu Bofang. Theory and Application of Finite Element Method. Beijing: Water Conservancy and Electric Power Press, 1979(in Chinese))
- 10 宋天霞. 非线性结构有限元计算. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996 (Song Tianxia. Nonlinear Structure Finite Element Calculation. Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 1996(in Chinese))
- 11 何君毅, 林祥都. 工程结构非线性问题的数值解法. 北京: 国防工业出版社, 1994 (He Junyi, Lin Xiangdu. Numerical Solution of Nonlinear Problem of Engineering Structure. Beijing: National Defense Industry Press, 1994 (in Chinese))
- 12 刘方龙. 复合材料设计. 北京: 科学出版社, 1989 (Liu Fanglong. Composite Material Design. Beijing: Science Press, 1989(in Chinese))

NONLINEAR THERMAL VIBRATION CHARACTERISTIC ANALYSIS COMPOSITE LAMINATED PLATES *

Liu Qin Ren Jianting Jiang Jiesheng Guo Yunqiang Chen Huanguo

(*School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

Abstract By using the Finite Element Method (FEM), the nonlinear thermal vibration characteristics of composite laminated plates under linear temperature field were investigated. Based on the eigenvalue buckling analysis method, the bifurcation point of an ideal linear elastic structure was estimated. And the critical buckling temperature distribution and the lowest nature frequencies of composite laminated plates with different layers and orientations were also calculated and analyzed. Moreover, the general regularities of temperature effect on the thermal vibration characteristic of the composite plate structure were summarized. All these conclusions will give guidance on structure design and heat-resistant design.

Key words composite laminated plate, thermal vibration, thermal buckling, geometric nonlinearities