

大范围运动矩形板动力刚化分析

蒋建平 李东旭

(国防科技大学航天与材料工程学院,长沙 410073)

摘要 针对大范围运动下弹性矩形板,采用有限元技术和 Lagrange 方程建立了系统刚柔耦合一次近似动力学方程组.不同于传统动力学建模方法,本文采用两个弧长变量和一个笛卡尔坐标变量来描述板的变形,利用有限元方法离散,在动力学方程中得到了动力刚度项.数值仿真表明,在大范围运动下,传统的动力学模型不能正确的预示系统动力学行为;而本文动力学模型能够较好的预测系统的动力学行为,且比采用假设模态离散板变形的的方法更为精确.

关键词 动力刚化,刚柔耦合,有限元,数值仿真

引言

随着挠性航天器、挠性机械臂,高速、轻质、高精度机械系统的发展,弹性体大范围运动与其自身变形运动之间的耦合动力学问题成为上述领域需解决的普遍问题和关键技术. Kane 等^[1]指出大范围运动下弹性体存在动力刚度项,没有计及动力刚度项的传统动力学分析方法将得到错误的结论;并首次提出了动力刚化的概念.之后,动力刚化问题一直是柔性体动力学研究的热点^[2-5].

Kane 与 Banerjee^[2]等根据板中面的变形几何关系,采用假设模态法离散板的变形,在动力学方程得到了与动力刚化现象有关动力刚度项;后来, H. H. Yoo^[3]对这一方法进行了完善.但是,这种方法所采用的模态,是结构动力学意义下的柔性体的模态函数.既然大范围运动下,由于动力刚度项的影响,柔性体的频率、模态特性发生了变化,即动力刚化现象,继续用静止条件下结构的模态函数来离散大范围运动下柔性体的变形,其适用性有待讨论.

张大钧与刘才山等提出了一种非线性耦合法,将柔性体的变形表示为模态坐标的二阶耦合形式,根据小变形假设得到耦合形函数,并将这种方法应用于柔性梁板^[4]的动力刚化分析,得到了合理的结果.

本文针对大范围运动下的矩形板,借用变形几何约束法思想,利用有限元方法离散板的变形,

避免了模态选取所带来的误差,最后利用 Lagrange 方程建立了系统的刚柔耦合一次近似动力学方程.针对大范围刚体转动下的悬臂矩形板进行了数值仿真.仿真结果表明,计及了动力刚度项的本文动力学模型能够正确预示大范围运动板的动力学行为;采用结构动力学意义下的模态来离散板的变形所得的仿真结果与有限元法离散所得结果存在一定的误差.

1 动力学方程推导

大范围运动下矩形板如图 1 所示,为使问题简洁,作如下假设:

- 1) 板的材料均匀且各向同性;
- 2) 板厚均匀且相对于长、宽小得多, Kirchhoff 假设成立;
- 3) 忽略剪切和转动惯量的影响.

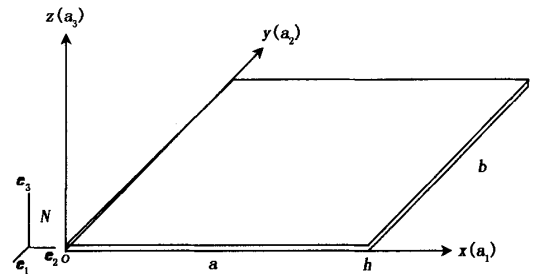


图 1 大范围运动矩形板

Fig. 1 Rectangular plate undergoing overall motion

图 1 中,坐标系 e_1, e_2, e_3 为惯性坐标系,坐标系 $o-a_1a_2a_3$ 为连体坐标系,其中,坐标平面 oa_1a_2 与未变形前板的中面重合.变形前板中面上一点 P_0 (在连体坐标系下坐标为 (x_p, y_p, o)),变形后至 P 点,变形位移矢量为 $u(u_1, u_2, u_3)$,变形关系如图 2 所示.

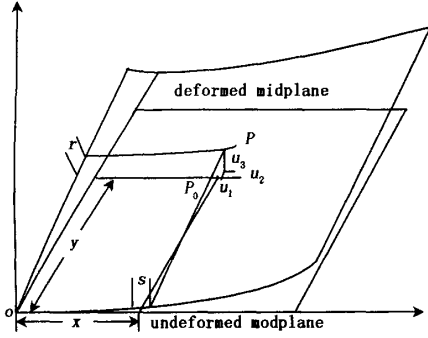


图 2 板中面变形几何关系

Fig. 2 Deformation for a rectangular plate

则 P 点在惯性基下的速度矢量可表示为

$$\mathbf{V}^P = \mathbf{V}^0 + \boldsymbol{\omega}^A \times (\mathbf{P} + \mathbf{u}) + {}^A\mathbf{V}^P \quad (1)$$

其中 $\mathbf{V}^0, \boldsymbol{\omega}^A$ 为连体坐标系 A 相对于惯性坐标系的速度、角速度矢量; \mathbf{p}, \mathbf{u} 分别为点 P_0 在连体坐标系中的位置矢量和变形矢量; ${}^A\mathbf{V}^P$ 为 P 点相对于连体坐标系的速度矢量.

各矢量在连体坐标系中的分量形式为

$$\mathbf{V}^0 = v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\omega}^A = \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \omega_3 a_3 \quad (3)$$

$${}^A\mathbf{V}^P = \dot{u}_1 a_1 + \dot{u}_2 a_2 + \dot{u}_3 a_3 \quad (4)$$

$$\mathbf{p} = x a_1 + y a_2 \quad (5)$$

对式(1)求导可得 P 点在惯性坐标系下的加速度矢量为

$$\mathbf{a}^P = \frac{d}{dt} \mathbf{V}^P + \boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{V}^P \quad (6)$$

采用弧长变量 s, r (如图 2 所示)和坐标变量 u_3 来描述 P 点的变形位移场.根据板的变形约束条件,得到如下关系式^[3]

$$u_1 = s - \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \quad (7)$$

$$u_2 = r - \frac{1}{2} \int_0^{\eta} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta \quad (8)$$

其中 ξ 与 η 为积分哑元变量.本文采用有限元方法来离散板的变形.选用 4 节点 20 自由度的矩形板单

元,即

$$\mathbf{s} = [N_1] \{\delta\}^e, \mathbf{r} = [N_2] \{\delta\}^e, u_3 = [N_3] \{\delta\}^e \quad (9)$$

其中 $[N_1], [N_2]$ 和 $[N_3]$ 为板单元的形函数, $\{\delta\}^e$ 为单元节点位移列阵.

将式(9)代入式(7)和(8),得到

$$u_1 = [N_1] \{\delta\}^e - \frac{1}{2} \{\delta\}^e [H_1] \{\delta\}^e \quad (10)$$

$$u_2 = [N_2] \{\delta\}^e - \frac{1}{2} \{\delta\}^e [H_2] \{\delta\}^e \quad (11)$$

其中 $[H_1]$ 与 $[H_2]$ 为变形耦合型函数,其定义为

$$[H_1] = \int_0^{x_p} \left(\frac{\partial [N_3]}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial [N_3]}{\partial x} \right) dx \quad (12)$$

$$[H_2] = \int_0^{y_p} \left(\frac{\partial [N_3]}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial [N_3]}{\partial y} \right) dy \quad (13)$$

板单元节点位移列阵为

$$\{\delta\}^e = \{[\delta_i]^T [\delta_j]^T [\delta_k]^T [\delta_l]^T\}^T \quad (14)$$

其中 $[\delta_i]^T = [u_{1i} \ u_{2i} \ u_{3i} \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}]$ ($i = i, j, k, l$); u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} 分别表示节点 i 沿方向 a_1, a_2, a_3 的位移, θ_{xi}, θ_{yi} 则表示节点绕轴 a_1, a_2 的转角.

该矩形板单元可以看作是平面矩形板单元与弯曲板单元的复合,因此,其形函数也可看作是两类单元形函数的组合.其中形函数 $[N_1]$ 与 $[N_2]$ 取为平面矩形板单元的形函数,形函数 $[N_3]$ 取为弯曲矩形板单元形函数.

采用 Lagrange 方程来推导板单元的动力学方程. Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^e}{\partial \{\delta\}^e} \right) - \frac{\partial T^e}{\partial \{\delta\}^e} + \frac{\partial U^e}{\partial \{\delta\}^e} = 0 \quad (15)$$

其中 T^e 代表板单元的动能,而 U^e 代表板单元的变形能.

板单元的动能为

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho \mathbf{V}^P \cdot \mathbf{V}^P dy dx \quad (16)$$

将速度表达式(1)代入,并引入 u_1, u_2 和 u_3 的表达式即可得到板单元动能的广义坐标表达式.

板单元的应变能包括板弯曲变形能 U_b 和面内变形能 U_m ,即板单元的势能表达式为

$$U^e = U_m + U_b \quad (17)$$

其中

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \beta_3 \left[\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$

$$2\nu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}\right)^2 \Big] dydx \quad (18)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \beta_1 \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} dydx \quad (19)$$

2a, 2b 分别代表板单元的长度和宽度. 而

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \\ \beta_2 &= Gh, \\ \beta_3 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (20)$$

E, G, ν 和 h 分别代表板的弹性模量、剪切刚度、泊松比和板的厚度. 将式(9)代入势能表达式, 即可得到势能的详细表达式. 再根据 Lagrange 方程, 适当线性化后, 即可得到系统的动力学方程组. 为简化书写, 作如下定义

$$M_{ij} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho [N_i]^T [N_j] dydx \quad (21)$$

$$X_i = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho x_P [N_i]^T dydx \quad (22)$$

$$Y_i = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho y_P [N_i]^T dydx \quad (23)$$

$$Z_i = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho [N_i]^T dydx \quad (24)$$

$$Kd_i^X = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho x_P [H_i] dydx \quad (25)$$

$$Kd_i^Y = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho y_P [H_i] dydx \quad (26)$$

$$Kd_i = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho [H_i] dydx \quad (27)$$

$$K = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \beta_1 \left[\left(\frac{\partial [N_1]}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial [N_1]}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial [N_2]}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial [N_2]}{\partial y} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial [N_1]}{\partial x} \right)^T \times \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial [N_2]}{\partial y} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\partial [N_1]}{\partial y} + \frac{\partial [N_2]}{\partial x} \right)^T \times \left(\frac{\partial [N_1]}{\partial y} + \frac{\partial [N_2]}{\partial x} \right) + \beta_3 \left[\left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial x^2} \right)^T \times \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial y^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial y^2} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \times \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial x\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial^2 [N_3]}{\partial x\partial y} \right) \right] \Big\} dydx \quad (28)$$

得到板单元的动力学方程组为

$$[m] \{\delta\}^e + [k] \{\delta\}^e + [c] \{\dot{\delta}\}^e = \{f\} \quad (29)$$

其中

$$[m] = (M_{11} + M_{22} + M_{33}) \quad (30)$$

$$[c] = 2[\omega_1(M_{32} - M_{23}) + \omega_2(M_{13} - M_{31}) + \omega_3(M_{21} - M_{12})] \quad (31)$$

$$\begin{aligned} [k] &= K + [\dot{\omega}_1(M_{32} - M_{23}) + \dot{\omega}_2(M_{13} - M_{31}) + \dot{\omega}_3(M_{21} - M_{12})] - \\ &[\omega_1^2(M_{22} - M_{33}) + \omega_2^2(M_{11} + M_{33}) + \omega_3^2(M_{11} + M_{22})] + \\ &[\omega_1\omega_2(M_{12} + M_{21}) + \omega_2\omega_3(M_{23} + M_{32}) + \omega_1\omega_3(M_{13} + M_{31})] - \\ &(\dot{v}_1 Kd_1 + \dot{v}_2 Kd_2) + [(\omega_1^2 + \omega_3^2) Kd_2^Y + (\omega_2^2 + \omega_3^2) Kd_1^X] - \\ &[(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) Kd_2 + (\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) Kd_1] + \\ &[(\dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2) Kd_1^Y - (\dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2) Kd_2^X] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{f\} &= (\omega_2^2 + \omega_3^2) X_1 + (\omega_1^2 + \omega_3^2) Y_1 + \\ &(\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2) Z_3 + (\omega_1 v_3 - \omega_3 v_1) Z_2 + (\omega_3 v_2 - \omega_2 v_3) Z_1 + \\ &(\dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2) Y_1 - (\dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2) X_2 - (\dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3) Y_3 + \\ &(\dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3) X_3 \end{aligned} \quad (33)$$

其中 Kd_i^X, Kd_i^Y, Kd_i 即为动力刚度矩阵, 如果忽略它们的影响, 就为传统的动力学方程组. 从(32) 式中可以看出, 动力刚度项对系统刚度的影响与大范围的运动速度有关. 当大范围运动速度较高时, 不能忽略动力刚度项的影响. 而传统动力学建模方法中丢失了动力刚度矩阵, 导致其不能正确预示系统的动力学行为.

2 仿真分析

选择绕轴 a_2 作旋转运动下的大范围运动矩形薄板为仿真对象(参见图 1), 其中矩形板的参数如表 1 所示.

表 1 板的几何与材料参数

Table 1 The geometric and the material data for the plate

Notation	Data
Length a	1.0 m
Width b	0.5 m
Thickness h	0.0025 m
Young's modulus E	$7.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Poisson's ratio ν	0.3
Mass per unit area ρ	7.5 kg/m^2

系统转动角速度规律为

$$\omega_2 = \begin{cases} \frac{\Omega}{T} \left(t - \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) & 0 \leq t \leq T \\ \Omega & t > T \end{cases} \quad (34)$$

其中 Ω 为稳态转速, T 为加速时间. 分别取稳态转速 $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ 和 $\Omega = 20 \text{ rad/s}$, 加速时间 $T = 5 \text{ s}$ 进行仿真分析.

仿真结果如图 3 和图 4 所示, 其中虚线代表忽略动力刚度项的传统动力学模型, 而实线代表本文模型. 从图中可以看出, 当中心刚体转速超过板的一阶振动角频率时(悬臂板的一阶振动角频率为 12.713 rad/s), 传统的动力学模型得到了错误的结论. 可见动力刚度项对大范围运动下矩形板的动力学行为影响较大.

在研究板的动力刚化文献中, 如文[2,3] 都是采用结构动力学意义下的模态函数来离散板的变形. 但是, 由于大范围运动的影响, 板的频率特征和模态特性发生了变化. 如果继续利用结构动力学意义下的低阶模态离散板的变形, 可能会带来一定的误差, 如图 5 和图 6 所示. 图中虚线代表文献[3] 的仿真结果, 实线代表本文的有限元方法的仿真结果. 从图中可以看出, 低阶模态函数离散所得结果

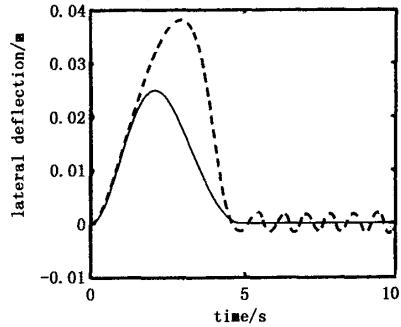


图 3 板自由端横向变形($\Omega = 10 \text{ rad/s}$)

Fig.3 Tip lateral deflection of plate($\Omega = 10 \text{ rad/s}$)

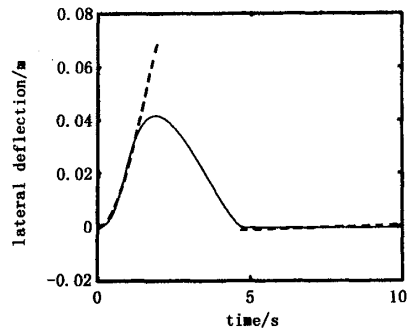


图 4 板自由端横向变形($\Omega = 20 \text{ rad/s}$)

Fig.4 Tip lateral deflection of plate($\Omega = 20 \text{ rad/s}$)

与有限元方法离散所得结果之间存在差异, 且相差的大小随着转速的增加而增大. 在系统稳态转速为 $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ 时, 两种方法的最大差为 10%; 而当稳态转速为 $\Omega = 20 \text{ rad/s}$ 时, 这种差异达到 24.57%. 文献[5] 指出, 提高模态截断阶数, 可以减少这种误差. 但是, 模态阶数过高会给计算带来困难, 本文的研究提供了一种解决方案.

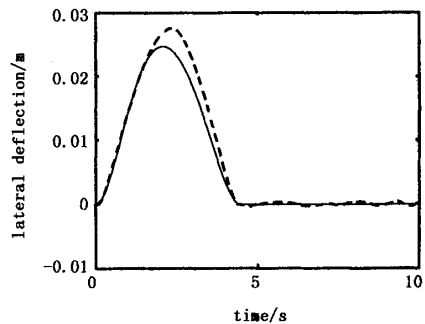


图 5 两种方法结果比较($\Omega = 10 \text{ rad/s}$)

Fig.5 Comparison of different methods ($\Omega = 10 \text{ rad/s}$)

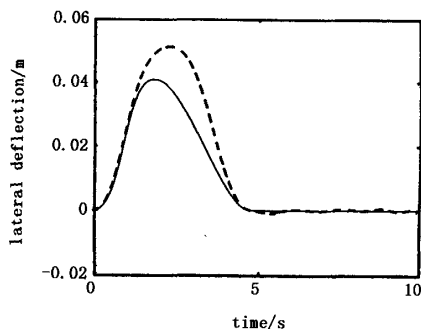


图6 两种方法结果比较($\Omega = 20 \text{ rad/s}$)

Fig. 6 Comparison of different methods ($\Omega = 20 \text{ rad/s}$)

3 结论

1) 动力刚度矩阵对柔性体刚度的影响随大范围运动的角速度增大而增大,传统的动力学模型由于丢失了动力刚度矩阵,只适合于精度要求不高且大范围运动为低速的柔性体。

2) 由于大范围运动下柔性体的频率特征与模态特性发生了变化,采用结构动力学意义下的模态函数离散大范围运动下柔性体的变形会带来一定的误差。

3) 本文采用有限元方法来离散板的变形,从而避开了模态选取的困难。

参 考 文 献

- 1 Kane TR, Ryan RR, Banerjee AK. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, 10(2): 139~151
- 2 Banerjee AK, Kane TR. Dynamics of a plate in large overall motion. *Journal of Applied Mechanics*, 1989, 56: 887~892
- 3 Yoo HH, Chung J. Dynamics of rectangular plates undergoing prescribed overall motion. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(1): 123~137
- 4 Zhang DJ, Huston RL. On dynamic stiffening of flexible bodies having high angular velocity. *Mech Struct and Mach*, 1996, 24(3): 313~329
- 5 刘锦阳,洪嘉振. 作大范围运动矩形薄板的建模理论和有限元离散方法. *振动工程学报*, 2003, 16(2): 175~178 (Liu Jinyang, Hong Jiazhen. Dynamic modeling theory and finite element method for a rectangular plate undergoing large overall motion. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(2): 175~178 (in Chinese))

DYNAMIC ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATE UNDERGOING OVERALL MOTION

Jiang Jianping Li Dongxu

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract The rectangular plate undergoing overall motions was investigated. The dynamic equations were derived through the Finite Element Method and Lagrange equations. Different from the conventional linear modeling method which employs three Cartesian deformation variables, the present modeling method used two non-Cartesian variables along with one Cartesian variable to describe the elastic deformation. Therefore the dynamic stiffness terms was captured. The numerical study demonstrated that the equations of motion presented here are more reliable and accurate than the traditional dynamic equations. Some errors will appear if the assumption modal method is used to describe the deformation of flexible plate undergoing overall motions.

Key words dynamic stiffness, rigid-flexible, finite element method, numerical simulation