

谐波平衡法求解俯仰运动矩形贮箱 中液体非线性晃动*

贺元军¹ 王萍萍¹ 王本利¹ 马兴瑞²

(1. 哈尔滨工业大学航天工程系, 哈尔滨 150001)(2. 中国航天科技集团, 北京 100830)

摘要 针对俯仰运动贮箱中液体的晃动用变分原理建立了一类新的 Lagrange 函数, 以此为基础可以解析方式来研究俯仰运动贮箱中液体的非线性晃动. 首先将速度势函数 Φ 在自由液面处作波高函数 η 的 Taylor 级数展开, 从而导出自由液面运动学和动力学边界条件非线性方程组; 然后用谐波平衡法 (HBM) 假设其解为各次主导谐波叠加的形式, 并代入方程组中得到含有未知系数相应多个代数方程式; 最后用 Broyden 法对代数方程组求解. 以无挡板开口二维、刚性矩形贮箱为例, 研究了液体的大幅晃动, 就液体晃动的幅值而言, 在一定激励频率范围内, 理论计算值与试验结果吻合较好, 同时液面波高出现明显的零点漂移现象.

关键词 矩形贮箱, 非线性晃动, 谐波平衡法

引言

在航天工程的发展过程中, 推进剂的晃动一直是一个在充液航天器总体设计中必须考虑的问题. 近年来国内外不少学者对充液容器中的液体晃动作了大量的理论、数值和实验研究^[1-8]. 矩形贮箱中液体运动的固有频率与振型、受迫响应、随机响应、阻尼特性(包括挡板的作用)、液体质心的变化、晃动对器壁的作用力和力矩、微重力环境下的晃动特性等^[1-2]都作过研究; 其研究方法一般采用基于线性理论的摄动法、变分 Ritz 法、Galerkin 法等^[1]; 基于非线性理论的多尺度法^[3-4]、有限元法^[2]、边界元法、任意 Lagrange-Euler 法 (ALE)^[6]、MAC 法、VOF 法等^[7-8]数值方法, 得到了一些很有价值的成果.

谐波平衡法 (HBM) 的主要优点是可以求解强非线性系统的稳态响应问题. 该方法在非线性和振动问题的研究中得到了较普遍的应用, 但在液体晃动问题中还未见报道. 一方面由于该方法自身的缺陷, 其定常解接近于简谐; 另一方面由此得到的非线性代数方程组的维数是谐波数乘以自由度的个数, 所以对多自由度系统而言, 其计算量非常庞大. 为了解决这一问题, 近年来出现了增量谐波平衡法 (IHBM)、交替频域和时域的谐波平衡法 (AF-THBM)、多尺度-谐波平衡法 (MS-HBM) 和摄动多谐波平衡法 (RPMHBM) 等^[9]. 针对俯仰运动贮箱

中液体的晃动用变分原理建立了一类新的 Lagrange 函数, 其耦合非线性方程组自由度少, 且解接近简谐运动, 谐波平衡法能很好的求解. 在推导和求解过程中, 假定液体是无粘、无旋、不可压缩、并忽略表面张力的作用.

1 动力学模型及晃动控制方程

设贮箱的长度 $2a$ 为 $O(1)$, 矩形贮箱的宽度远小于长度, 可以认为液体在宽度方向上运动基本一致, 液体深度 h 为 $O(1)$ 或无限大值. 只考虑贮箱绕 y 轴作俯仰运动的情形, 转动中心距离水平静液面为 e . 贮箱模型及坐标系如图 1 所示.

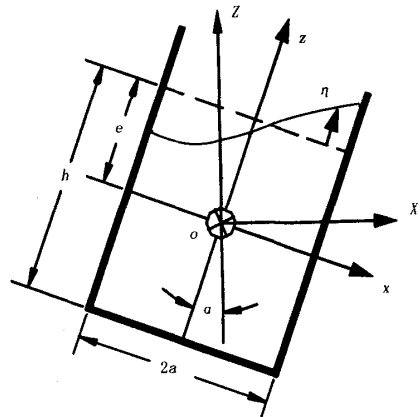


图1 矩形贮箱模型和坐标系

Fig. 1 A rectangular tank model and coordinate system

2004-08-30 收到第1稿, 2004-10-31 收到修改稿.

* 国防十五预研资助项目 (4132002031)

贮箱的运动规律为

$$\alpha = \theta_0 \sin \omega t \quad (1)$$

其中 α 为贮箱的偏转角度, θ_0 为贮箱的偏转幅值; ω 为转动角频率.

1.1 矩形贮箱中液体晃动的数学描述

在贮箱侧壁 [$x = \pm a$] 处的边界条件

$$\begin{aligned} \Phi_x &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i} = (z\Omega \mathbf{i} - \\ & x\Omega \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = z\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 为贮箱的偏转角速度; \mathbf{r} 为液体质点的位置矢量.

在贮箱底部 [$z = -(h - e)$] 处的边界条件

$$\begin{aligned} \Phi_x &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{k} = (z\Omega \mathbf{i} - \\ & x\Omega \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = -x\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

其中 \mathbf{k} 为 z 方向的单位矢量.

矩形贮箱中液体晃动可由如下关于速度势函数 Φ 和波高函数 η 的非线性初边值偏微分方程组表示

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0 \quad \text{in } V \quad (4)$$

$$\Phi_x = z\Omega \quad \text{at } x = \pm a \quad (5)$$

$$\Phi_x = -x\Omega \quad \text{at } z = -(h - e) \quad (6)$$

$$\eta_t + (\Phi_x - z\Omega)\eta_x = (\Phi_z - x\Omega) \quad \text{on } S_f \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + x\Omega \Phi_z - z\Omega \Phi_x + gz \cos \alpha - \\ gx \sin \alpha = 0 \quad \text{on } S_f \end{aligned} \quad (8)$$

其中(4)是连续方程;(5)是贮箱左右壁边界条件;(6)是贮箱底部边界条件;(7)和(8)分别表示自由液面运动学和动力学边界条件.

1.2 变分原理

将 Luke^[10] 所提出的驻定压力原理推广,使其适用于液体受迫响应.对于作平动和转动(俯仰和/或偏航)运动贮箱中的晃动问题,同样将 Lagrange 函数表示为液体压力的体积形式.由变分原理得到

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\Phi, \eta) \cdot dt \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} L(\Phi, \eta) = - \iint \left\{ \int_{-(h-e)}^{(\eta+e)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi - \right. \right. \\ \left. \left. V_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \right. \right. \\ \left. \left. V_0 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \right] dz \right\} dS \end{aligned} \quad (10)$$

这里, $\Phi(x, y, z, t)$ 和 $\eta(x, y, 0, t)$ 在时间 t_1 和 t_2

时刻有 $\delta \Phi = 0, \delta \eta = 0$. 对上述 Lagrange 函数变分可以得到如方程(4)~(8)描述的俯仰运动贮箱中液体晃动的控制方程和全部边界条件.

2 俯仰运动矩形贮箱中液体的大幅非线性晃动

在 Komatsu 思想^[3] 的启发下,以前面推广形式的驻定压力原理为基础,对于俯仰运动矩形贮箱的晃动液体,将 Lagrange 函数同样表示为液体的压力体积积分形式,即

$$\begin{aligned} L(\Phi, \eta) = - \iiint_V \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \right. \\ \left. (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \right\} dV \end{aligned} \quad (11)$$

将上式中 Φ_t 相对于 z 进行积分,则(11)式表示为

$$\begin{aligned} L(\Phi, \eta) = \int_{S_f} \Phi \frac{\partial \eta}{\partial t} dS - \iiint_V \left\{ \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \right. \\ \left. (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \right\} dV \end{aligned} \quad (12)$$

将 $L(\Phi, \eta)$ 各项在自由表面展开为 η 的幂级数并保留到四阶,方程(12)成为

$$\begin{aligned} L = \iint_{S_0} \left[\left(\Phi + \eta \cdot \Phi_z + \frac{\eta^2}{2} \Phi_{zz} \right) \eta_t - \frac{1}{2} \Phi \cdot \Phi_z - \right. \\ \left. \frac{\eta}{2}(\nabla \Phi)^2 - \frac{\eta^2}{2} \left(\nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. \Phi x \Omega + \eta [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi] + \right. \\ \left. \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi]}{\partial z} \right] + \right. \\ \left. g \eta x \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cos \alpha \eta^2 - g \eta \cos \alpha \right] dx dy + \\ \frac{1}{2} \left(\int_{-(h-e)}^e [\Phi z \Omega] dy dz \Big|_{x=a} - \right. \\ \left. \int_{-(h-e)}^e [\Phi z \Omega] dy dz \Big|_{x=-a} \right) + \\ \frac{1}{2} \int_{-a}^a (\Phi x \Omega) dx dy \Big|_{z=e-h} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 S_0 为矩形贮箱的水平截面.由上面分析看到,在自由表面 S_f 的积分已经转化为在水平静液面 S_0 的积分.

将速度势函数 $\Phi(x, z, t)$ 和波高函数 $\eta(x, t)$ 表示为如下特征函数的和

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0 \Omega + \sum_n a_n(t) \phi_n(x, z) \quad (14)$$

$$\eta(x, t) = \sum_n b_n(t) \phi_n(x, e) \quad (15)$$

其中 $\Phi_0 \Omega$ 考虑非均匀边界条件,求解方程(4)~(8)的线性化方程,可得到 Φ_0 ^[4]

$$\Phi_0(x, z) = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{4}{\pi^3(2n-1)^3} \left[\frac{1}{\cosh\left[(2n-1)\frac{\pi a}{h}\right]} h^2 \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{h}\left(z + \frac{h}{2} - e\right)\right] \times \right. \\ \left. \sinh\left[(2n-1)\frac{\pi}{h}x\right] + \frac{4a^2 \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2a}x\right] \cosh\left[(2n-1)\frac{\pi}{2a}(z-e)\right]}{\sinh\left[(2n-1)\frac{\pi}{2a}h\right]} \right] \quad (16)$$

$\phi_n(x, z)$ 是液体运动的第 n 阶特征模态, 针对于矩形贮箱而言, 有

$$\phi_n(x, z) = \frac{\cosh[k_n(z+h-e)]}{k_n \sinh k_n h} \times \cos k_n(x+a) \quad (17)$$

$$\phi_n(x, e) = \frac{\cosh k_n h}{k_n \sinh k_n h} \cos k_n(x+a) \quad (18)$$

其中波数 $k_n = \frac{n\pi}{2a}$, 贮箱中液体的固有频率为

$$\omega_n^2 = k_n g \tanh[k_n h] \quad (19)$$

将 $\Phi(r, \theta, z, t)$ 和 $\eta(r, \theta, t)$ 的表达式代入方程(13) 中进行积分, L 最后表示为

$$L = \sum_i \{ \Omega \delta_i \dot{b}_i + \beta_i a_i \dot{b}_i - \frac{1}{2} \lambda_i \beta_i a_i^2 + \Omega a_i \pi_i - \frac{1}{2} g \beta_i \cos a_i b_i^2 + (\Omega^2 W_i + g \tau_i \sin a) b_i \} + \\ \sum_{i,j} \{ \Omega a_i b_j X_{ij} + \Omega^2 b_i b_j Y_{ij} \} + \sum_{i,j,k} \{ \Omega Z_{ij} a_i b_j b_k + \frac{\Omega}{2} \gamma_{ijk}^* b_i b_j \dot{b}_k + \lambda_i a_{ij}^k a_i b_j b_k - \frac{1}{2} \mu_{ij}^k a_i a_j b_k \} + \\ \sum_{i,j,k,l} \{ -\frac{1}{2} \lambda_i \Pi_{ij}^k a_i a_j b_k b_l + \frac{1}{2} k_i^2 \Gamma_{ij}^k a_i b_j b_l \} \quad (20)$$

其中“ \cdot ”表示对时间的导数, 计算需用参数的表达式如下

$$k_i = (i \times \pi) / (2a), \lambda_i = k_i \tanh k_i h,$$

$$a_{ij}^k = \int \phi_i \phi_j \phi_k ds, \tau_i = \int x \phi_i ds \Big|_{z=e},$$

$$\delta_i = \int \phi_i \Phi_0 ds, v_i = \int x \phi_i ds \Big|_{z=e-h},$$

$$\zeta_i = \int \phi_i z ds \Big|_{x=a}, \xi_i = \int \phi_i z ds \Big|_{x=-a},$$

$$\pi_i = -\frac{1}{2} \lambda_i \delta_i - \tau_i + \frac{1}{2} v_i + \frac{1}{2} \zeta_i - \frac{1}{2} \xi_i,$$

$$\psi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \beta_i = \int \phi_i^2 ds, \beta_{ij}^k = \int \psi_i \psi_j \phi_k ds,$$

$$\mu_{ij}^k = \lambda_i \lambda_j a_{ij}^k + \beta_{ij}^k, \Gamma_{ij}^k = \int \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l ds,$$

$$\Lambda_{ij}^k = \int \psi_i \psi_j \phi_k \phi_l ds, \Pi_{ij}^k = k_j^2 \Gamma_{ij}^k + \Lambda_{ij}^k$$

将得到的 Lagrange 函数 L 代入到变分方程中, 可以导出下面的非线性耦合常微分方程组

$$\beta_m \lambda_m a_m - \beta_m \dot{b}_m - \Omega \pi_m - \Omega \sum_i b_i X_{mi} - \\ \Omega \sum_{i,j} b_i b_j Z_{mij} - \sum_{i,j} \lambda_m a_{mi}^j b_j \dot{b}_j + \sum_{i,j} \mu_{mi}^j a_i b_j - \\ \sum_{i,j,k} \left\{ -\frac{1}{2} (\lambda_m \Pi_{mi}^k + \lambda_i \Pi_{mi}^k) a_i b_j b_k + \right. \\ \left. \frac{1}{2} k_m^2 \Gamma_{mi}^k b_i b_j b_k \right\} = 0 \quad (21a)$$

$$- g a \tau_m + \frac{1}{6} a^3 g \tau_m - \frac{1}{2} g a^2 \beta_m \dot{b}_m + \beta_m \dot{a}_m + \\ \beta_m g b_m + \delta_m \Omega - \Omega^2 W_m - \\ \Omega \sum_i a_i X_{im} + 2 \Omega^2 \sum_i b_i Y_{mi} + \\ \sum_{i,j} \lambda_i a_{ij}^m \dot{a}_j b_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu_{ij}^m a_i a_j - \\ 2 \Omega \sum_{i,j,k} Z_{ijm} a_i b_j b_k + \sum_{i,j,k} \lambda_i \Pi_{ij}^m a_i a_j b_k - \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \gamma_{mij}^* \left[2 \Omega b_i \dot{b}_j - \frac{\partial}{\partial t} (b_i b_j \Omega) \right] - \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_i^2 \Gamma_{ij}^m \left[2 a_i b_j \dot{b}_k - \frac{\partial}{\partial t} (a_i b_j b_k) \right] = 0 \quad (21b)$$

上述方程给定了自由表面的运动学和动力学边界条件.

3 非线性晃动方程组的求解

3.1 谐波平衡法

谐波平衡法通常用来求解强非线性问题稳定周期解. 于是利用谐波平衡法思想, 可设

$$a(t) = a_0 + \sum_{n=1}^m (c_n \cos(n\omega t) + d_n \sin(n\omega t)) \quad (22a)$$

$$b(t) = b_0 + \sum_{n=1}^m (e_n \cos(n\omega t) + f_n \sin(n\omega t)) \quad (22b)$$

把(22a), (22b) 式带入微分方程(21a) 和(21b) 中, 并利用方程(1), 借助于 mathematica 的符号推导功能, 对代数方程组进行推导和化简, 并分别令两边的常数项、各次正弦谐波、余弦谐波的系数相等, 取 $m = 3$ 就得到 14 个代数方程式

$$F_i(a_0, c_1, d_1, \dots, c_3, d_3, b_0, e_1, f_1, \dots, e_3, f_3) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 14 \quad (23)$$

对于这组方程, 只有在极为特殊的情况, 才有

可能直接求解,对于大部分情况只能依靠数值计算的迭代法. Newton 法是该领域中几乎所有算法的基础,但由于每计算一步都要计算 Jacobi 矩阵及其逆,计算量非常大且效率低,甚至得不到需要的解,为了改善 Newton 法的不足,产生了若干的变形算法,如 Newton 上山-下山法等. 文中采用拟 Newton 法中的 Broyden 方法求解非线性代数方程组. 给出一组初值 x_0 , 用迭代方法求解方程组(23), 即可得到系统的稳态响应.

其中 Jacobi 矩阵

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_0} & \frac{\partial F_1}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial f_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_0} & \frac{\partial F_2}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial f_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{14}}{\partial a_0} & \frac{\partial F_{14}}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial F_{14}}{\partial f_3} \end{bmatrix}_{14 \times 14} \quad (24)$$

3.2 数值算例

为考察本文所提方法的正确性,将由本文方法计算所得的液面波高理论值与文献[5]的计算结果及所提供的液面波高实验数据进行比较. 实验所采用贮箱模型如图 2 所示. 贮箱的宽度和贮箱的高度均为 1000 mm, 贮箱的底部到俯仰转动轴的距离由 c 表示, 为 200 mm. 液面波高记录器 A_1 放置在距离贮箱器壁 50 mm 处.

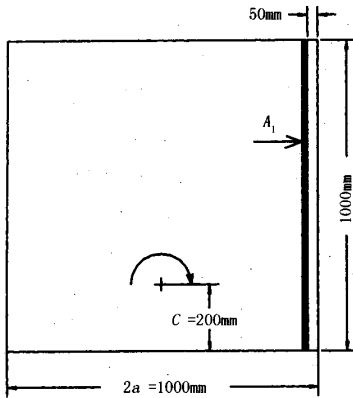


图 2 实验贮箱模型^[5]

Fig.2 Tank model for the experiment^[5]

对应于不同激振频率和幅值,以图示方式给出了比较结果. 在图中, T 为激励的周期, T_N 为贮箱中液体的第一阶固有周期, T_N 可以写为

$$T_N = 2\pi/\omega_1 \quad (25)$$

其中 ω_1 由 (19) 式确定.

分析图 3 和图 4 可以得到,在激励频率大于且接近第一阶固有频率时,与实验结果相比较,本文所得结果明显要好于 Faltinsen 所得结果;由图 5 可以看出,在激励频率小于且靠近一阶固有频率时,与实验结果相比较,本文所得结果比 Faltinsen 所得结果差一些;对应于图 6 的大幅晃动情形, Faltinsen 方法已不能给出较为合理的结果,但本文方法还能给出与试验结果较为一致的解;从所有液面波动幅值图来看,液面波高出现明显的零点漂移现象.

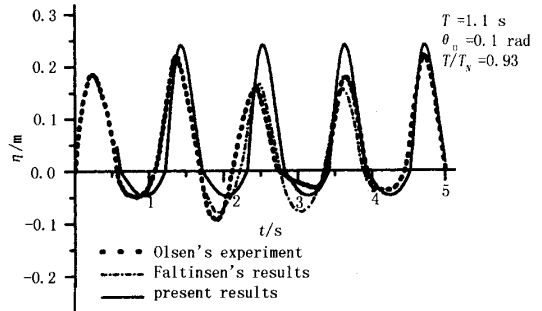


图 3 相对于贮箱的液面波动幅值

Fig.3 Wave amplitude at wall relative to tank

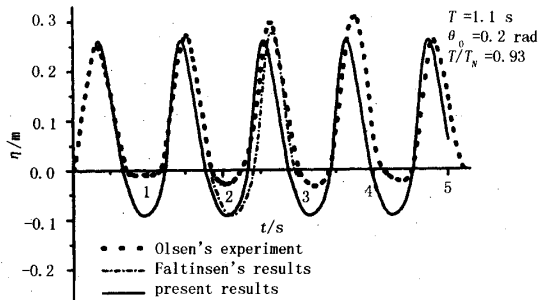


图 4 相对于贮箱的液面波动幅值

Fig.4 Wave amplitude at wall relative to tank

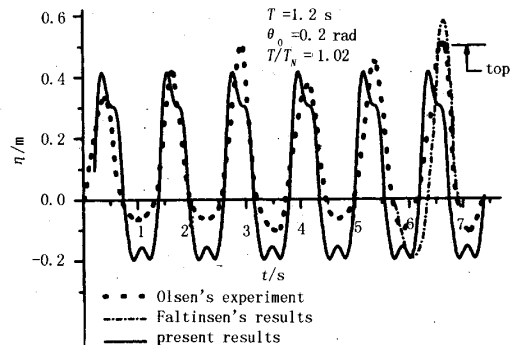


图 5 相对于贮箱的液面波动幅值

Fig.5 Wave amplitude at wall relative to tank

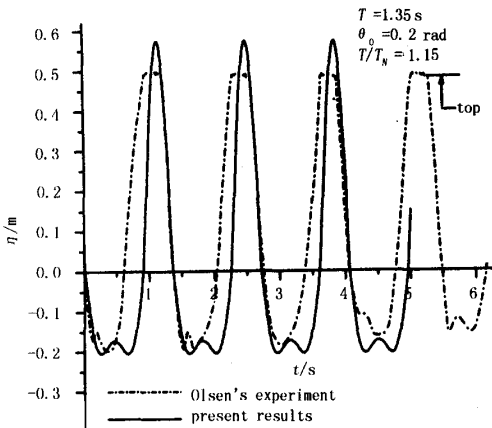


图6 相对于贮箱的液面波动幅值

Fig. 6 Wave amplitude at wall relative to tank

4 结论及展望

常重环境下矩形贮箱中液体的小幅、有限幅和大幅晃动问题的研究中,无论是理论解、数值解或者实验解,都取得了较好的成果,其部分理论已用于工程实际中。通过本文的研究,一方面得到了较好的计算结果,验证了方法的正确性;另一方面可将本方法推广到在轨微重力环境下复杂贮箱中液体的大幅非线性晃动中,而这恰恰是航天工程设计中亟待解决的问题之一。

在简谐激励作用下的非线性系统,其强迫振动不一定是简谐振动,其相应的波形通常由各次谐波组成,除与激励频率相同的谐波外,还含有超谐波响应和次谐波响应,前者在非线性系统中或多或少是存在的,而后者只在一定的条件下产生,因此对于本系统,是否存在超谐波和次谐波响应以及稳定性等,也是接下来需要研究的内容。

参 考 文 献

1 马兴瑞,王本利,苟兴宇. 航天器动力学——若干问题研

究及应用. 北京: 科学出版社, 2001. 5~23 (Ma Xingrui, Wang Benli, Gou Xingyu. Research and application of some problems in the spacecraft dynamics. Beijing: Science Press: 2001 (in Chinese))

- 2 Serdar Celebi M, Hankan Akyildiz. Non-linear modeling of liquid sloshing in a moving rectangular tank. *Ocean Engineering*, 2002, 29: 1527~1553
- 3 Komatsu K. Nonlinear sloshing analysis of liquid in tanks with arbitrary geometries. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1987, 22(3): 193~207
- 4 尹立中, 王本利, 邹经湘, 等. 俯仰运动矩形贮箱中液体的非线性晃动. *强度与环境*, 1999, 3: 40~49 (Yin Lizhong, Wang Benli, Zou Jingxiang, et al. The nonlinear sloshing of liquid in a rectangular container under pitching excitation. *Structure & Environment Engineering*, 1999, 3: 40~49 (in Chinese))
- 5 Odd M Faltinsen. A non-linear theory of sloshing in rectangular tanks. *J of Ship Research*, 1974, 18(4): 224~241
- 6 Souli M, Zolesio JP. Arbitrary langrangian-eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer Methods Applied Mechanics Engineer*, 2001, 191: 451~466
- 7 岳宝增, 刘延柱, 王照林. 求解液体大幅晃动问题的数值方法评述. *上海交通大学学报*, 1999, 33(6): 760~763 (Yue Baozeng, Liu Yanzhu, Wang Zhaolin. Review of numerical methods for simulating large-scale amplitude sloshing of liquid. *J of Shanghai Jiaotong Univ*, 1999, 33(6): 760~763 (in Chinese))
- 8 Chen Bangfuh, Chiang Hsuenweng. Complete two-dimensional analysis of sea-wave-induced fully non-linear sloshing fluid in a rigid floating tank. *Ocean Engineering*, 2000, 27: 953~977
- 9 Albertson F, Gilbert J. Harmonic balance method used for calculating the steady state oscillations of a simple one-cylinder cold engine. *J of Sound and Vibration*, 2001, 241(4): 541~565
- 10 Luke JC. A variation principle for fluid with a free surface. *J of Fluid Mechanics*, 1967, 27(2): 395~397

NONLINEAR SLOSHING OF LIQUID IN RECTANGULAR CONTAINER UNDER PITCHING EXCITATION BY HARMONIC BALANCE METHOD *

He Yuanjun¹ Wang Pingping¹ Wang Benli¹ Ma Xingrui²

(1. *Department of Astronautic and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

(2. *China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100830, China*)

Abstract By the variation principle, this paper built a new kind of Lagrange function to investigate the analytical solution of liquid nonlinear sloshing in a pitching tank. First, the Taylor series about wave elevation function η in the liquid free surface of velocity potential function was derived, and the nonlinear equations of free surface kinetic boundary condition and dynamic boundary condition was gained. Then, by supposing the solution to be the superposition of each dominated harmonic wave, the corresponding algebraic equations about unknown coefficients by Harmonic Balance Method (HBM) was derived. Finally, the algebraic equations were solved by the Broyden method. By the examples of a two-dimensional, rigid, rectangular, open tank without baffles, the liquid large amplitude-sloshing problem was illustrated. The results showed that the theoretical calculation agreed well with the experimental results at certain frequency range for the amplitude of liquid sloshing, and that the phenomenon of zero shift at the liquid surface was obvious.

Key words rectangular container, nonlinear sloshing, Harmonic Balance Method