

连续混沌系统的混沌同步控制

陈保颖¹ 包芳勋²

(1. 广东工业大学应用数学学院, 广州 510006) (2. 山东大学数学学院, 济南 250100)

摘要 给出了一种实现混沌系统混沌同步的控制方法. 通过引入一待定的控制项, 将两系统的混沌同步问题转化为讨论与其对应的线性系统的0解渐近稳定性问题, 然后根据线性系统控制理论确定此控制项, 以实现两混沌系统的同步目的. 该方法简单易行, 可有效的实现两个混沌系统的混沌同步, 且其同步是全局渐近稳定的.

关键词 全同混沌系统, 非全同混沌系统, 混沌同步, 全局渐近稳定

引言

混沌同步近年来一直是非线性科学研究的热点之一. 至今在混沌同步中应用较多的方法大致有: Pecora-Carroll 提出的驱动-响应同步法、OGY 控制方法、线性与非线性反馈方法等等. PC 方法是利用所有李雅普诺夫指数都为负来实现两个子系统的同步, 但是条件李雅普诺夫指数的计算是件十分困难的事. 其他的方法也多以李雅普诺夫直接法为基础, 寻找李雅普诺夫函数以满足其运动稳定性的一般理论从而实现两系统的混沌同步.

本文中提出的混沌同步方法属于控制同步类型. 将两个混沌系统的同步问题转换为研究线性系统的状态反馈镇定问题. 文献[1~3]使用这种方法实现了两个 Lorenz 系统、两个 Rossler 系统以及两个 Chen 系统的混沌同步. 该方法原理简单, 思路清晰, 对于一般的非线性连续混沌系统都可以应用此方法. 本文中给出该方法的同步原理, 并将其应用于吕金虎等发现新吸引子的系统, 给出了计算机模拟结果.

1 线性反馈可控性定理

首先给出本文用到的定理:

定理 1^[4] n 维常系数连续线性系统

$$\dot{x}/dt = A \cdot x + B \cdot u (t > 0) \quad (1)$$

完全可控的充要条件: $n \times (n \times m)$ 矩阵 $U = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ 的秩为 n .

一般地, 对于系统(1)应用极点配置技术, 对给定的 A, B , 总可以找到控制参数 Z (A, B 为实矩阵, Z 为 $m \times n$ 实矩阵), 可求得一个反馈控制项

$$u = Z \cdot x$$

使得闭环系统

$$\dot{x}/dt = (A + BZ) \cdot x = C \cdot x$$

C 为 $n \times n$ 矩阵, 具有满足 $|C - \lambda I| = 0$ 的 n 个事先指定的特征值 $\lambda_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 存在 (λ_i 为实数或复数, 出现复数时则成对共轭).

定理 2^[5] 对于线性定常系统

$$\dot{X} = A \cdot X, X(0) = X_0, t \geq 0$$

其唯一平衡状态 $X_c = 0$ 渐近稳定的充要条件: A 的所有特征值均具有负实部.

2 全同混沌系统同步原理及数值结果

2.1 全同混沌系统同步原理

假设 n 维非线性连续混沌系统用下列微分方程组表示

$$\dot{X} = f(X) \quad (2)$$

其中 $X = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, f(X)$ 为 n 维向量 X 的 n 维向量值函数.

记 $f(X) = A \cdot X + \phi(X)$ 其中 A 为对应于 f 的线性部分.

下面考虑两个全同的混沌系统

$$\dot{X} = f(X), X(0) = X_0 \quad (3)$$

$$\dot{Y} = f(Y), Y(0) = Y_0 \quad (4)$$

混沌系统具有对初值敏感依赖的特性, 如果初值具有极微小的变化, 最终轨道可能发生指数的分离.

为此, 在系统(4)中添加一控制项 $u(t)$, 得到受控系统

$$\dot{Y} = f(Y) + u(t) \quad (5)$$

如果可以找到一合适的控制项 $u(t)$, 使得系

统(5)的解 $Y(t)$ 满足:当 $t \rightarrow \infty$ 时, $Y(t) = X(t)$. 也就是使得系统(5)的解渐近稳定的趋于系统(3)的解. 那么系统(4)与系统(3)实现了混沌同步.

$$\text{对系统} \begin{cases} \dot{X} = A \cdot X + \phi(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\text{以及系统} \begin{cases} \dot{Y} = A \cdot Y + \phi(Y) + u(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

引入状态变量 $Z = Y - X$, 则差值 Z 满足以下方程

$$\begin{cases} \dot{Z} = A \cdot Z + [\phi(Y) - \phi(X)] + u(t) \\ Z(0) = Y(0) - X(0) = Y_0 - X_0 = Z_0 \end{cases}$$

令待定控制项 $u(t) = v(t)[\phi(X) - \phi(Y)]$, 得到

$$\dot{Z} = A \cdot Z + v(t) \quad (6)$$

至此,问题转化为寻找合适的 $v(t)$, 使得系统(6)的解 $Z(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$. 根据定理1, 很容易得出系统(6)是完全可控的. 所以可由极点配置技术寻找到形如: $v(t) = -KZ$ 的控制作用使得系统(6)的0解是渐近稳定的.

最后,给出控制项 $u(t)$ 的计算步骤:

首先根据定理2取一组期望的闭环特征值 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 满足 $\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$.

1) 计算由 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 决定的多项式, 即

$$\alpha(s) = (s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0.$$

2) 给出闭环系统矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & I_{n-1} \\ -\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

3) 计算 $-K = B - A$.

4) 计算 $v(t) = -KZ$.

5) 代回得 $u(t) = (B - A) \cdot (Y - X) + [\phi(X) - \phi(Y)]$.

可以看出,采用上述方法存在多种可选择的反馈形式,只要选取合适的 K 使得 $A - K$ 的所有特征值小于0即可.

2.2 数值例子

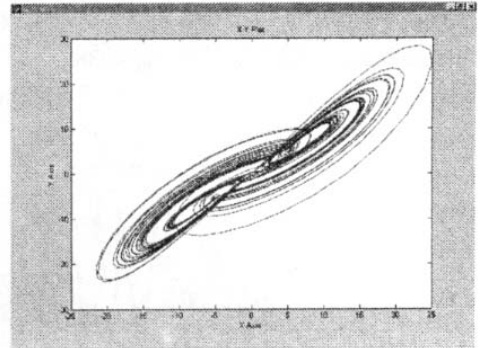
以下以吕金虎等发现新吸引子的系统为例,验证上述方法的可行性. 下面给出用 Matlab 中的 Simulink 软件包得到的计算机模拟结果.

该系统由以下三维常微分方程组描述

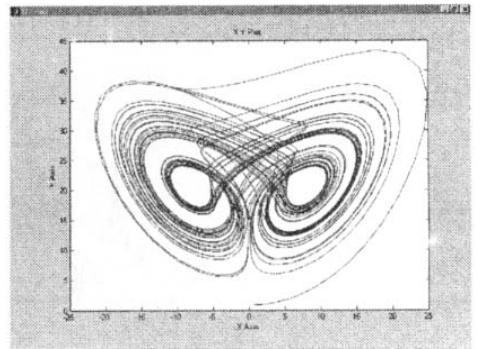
$$\begin{cases} \dot{x}' = a(y - x) \\ \dot{y}' = -xz + cy \\ \dot{z}' = xy - bz \end{cases}$$

数值计算^[6]表明:当参数 $a = 36, b = 3, c = 20$ 时,

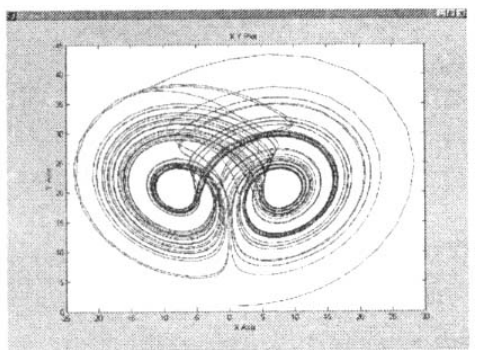
系统处于混沌状态. 用 Simulink 进行仿真模拟得到其混沌吸引子在 $x - y$ 平面、 $x - z$ 平面以及 $y - z$ 平面的投影,如图1.



(a) $x - y$



(b) $x - z$



(c) $y - z$

图1 混沌吸引子在各个平面上的投影

Fig.1 Projections of the chaotic attractor

对于系统

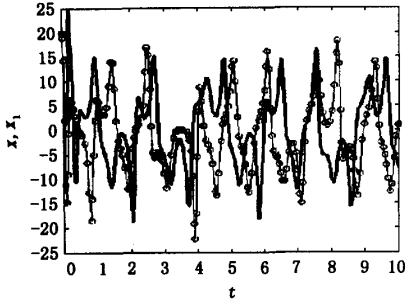
$$\begin{cases} \dot{x}' = 36(y - x) \\ \dot{y}' = -xz + 20y \\ \dot{z}' = xy - 3z \end{cases} \quad (7)$$

及受控系统

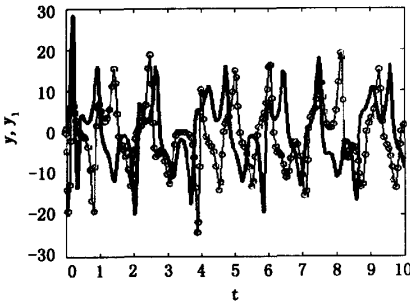
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 36(y_1 - x_1) + u_1(t) \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + 20y_1 + u_2(t) \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - 3z_1 + u_3(t) \end{cases} \quad (8)$$

式(7)的初值取为 $x_0 = 0.5, y_0 = 1, z_0 = 1$, 式(8)的初值取为 $x_{10} = 20, y_{10} = 1, z_{10} = 38$.

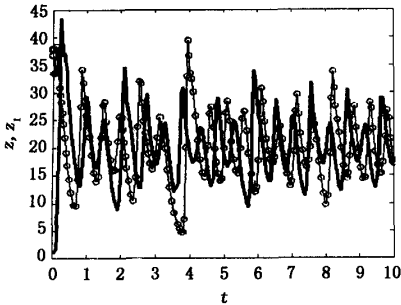
当 $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$ 时, 模拟结果如图 2.



(a) $x_1, x_1 - t$



(b) $y_1, y_1 - t$



(c) $z_1, z_1 - t$

图 2 无控制作用时两系统解的轨迹图
实线对应式(7)的解, 圈线对应式(8)的解.

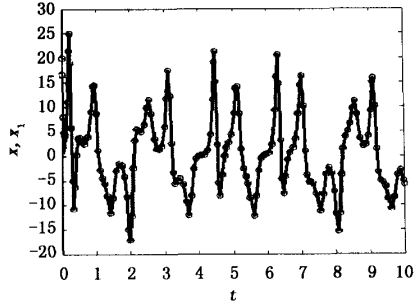
Fig. 2 Trajectories of two systems without control
Where the real line means solution of (7) and line with circle means solution of (8).

根据上述同步原理, 取期望的闭环特征值为

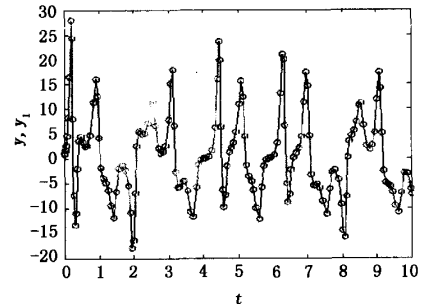
$\lambda_1 = -36, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$. 可以求得控制项

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36(y_1 - y) \\ -21(y_1 - y) + (x_1 z_1 - xz) \\ -(x_1 y_1 - xy) \end{bmatrix}$$

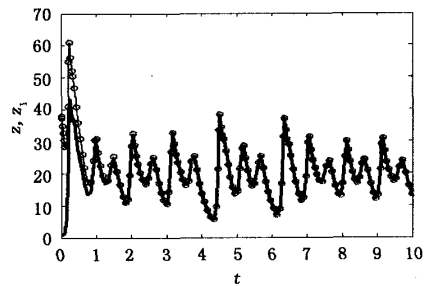
当控制项 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ 取为上述值时, 计算机模拟结果如图 3.



(a) $x_1, x_1 - t$



(b) $y_1, y_1 - t$



(c) $z_1, z_1 - t$

图 3 有控制作用时两系统解的轨迹图

Fig. 3 Trajectories of two systems with control

从上图可以看到在上述控制作用下, 两个非同系统的解很快就实现了同步.

3 非全同混沌系统同步原理及数值结果

3.1 非全同混沌系统同步原理

考虑两个非全同混沌系统

$$\dot{X} = f(X), \quad X(0) = X_0 \quad (9)$$

$$\dot{Y} = g(Y), \quad Y(0) = Y_0 \quad (10)$$

$f \neq g$, 在式(10)上加上一控制项 $u(t)$, 得到受控系统

$$\dot{Y} = g(Y) + u(t) \quad (11)$$

记 $f(X) = A \cdot X + \phi(X), g(Y) = B \cdot Y + \varphi(Y)$ 其中 A, B 分别对应于 f, g 的线性部分. 引入状态变量 $Z = Y - X$, 可以得到差值动力学方程

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= g(Y) - f(Y) + u(t) = [g(Y) - g(X)] + \\ & [g(X) - f(X)] + u(t) = \\ & B \cdot Z + \varphi(Y) - \varphi(X) + \\ & [g(X) - f(X)] + u(t) = \\ & B \cdot Z + \varphi(Y) - \\ & [f(X) - B \cdot X] + u(t) \end{aligned}$$

令 $\varphi_1(X) = f(X) - B \cdot X$, 则

$$\dot{Z} = B \cdot Z + \varphi(Y) - \varphi_1(X) + u(t)$$

此时, 令待定控制项

$$u(t) = v(t) + \varphi_1(X) - \varphi(Y) \quad (12)$$

则有

$$\dot{Z} = B \cdot Z + v(t) \quad (13)$$

至此, 问题同样转化为寻找合适 $v(t)$ 使得:

$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$. 由第1节可知对于系统(13)必存在形如: $v(t) = -K \cdot Z$ 的控制使得闭环系统 $\dot{Z} = (B - K) \cdot Z$ 的0解渐近稳定. 可得到实现混沌同步的控制: $u(t) = -K \cdot (Y - X) [+ f(X) - B \cdot X] - \varphi(Y)$.

3.2 数值例子

下面给出具有不同系统参数的新吸引子系统的混沌同步的实例.

前面新吸引子系统方程已给出. 数值计算^[6]表明: 参数 $a = 36, b = 3, 18 < c < 22$ 时, 系统处于混沌状态. 在此考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = 36(y - x) \\ \dot{y} = -xz + 20y \\ \dot{z} = xy - 3z \end{cases} \quad (14)$$

及

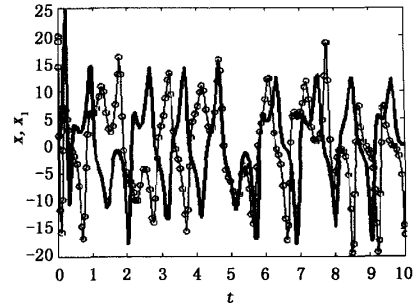
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 36(y_1 - x_1) + u_1(t) \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + 21y_1 + u_2(t) \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - 3z_1 + u_3(t) \end{cases} \quad (15)$$

$u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$ 时, 模拟结果如图4.

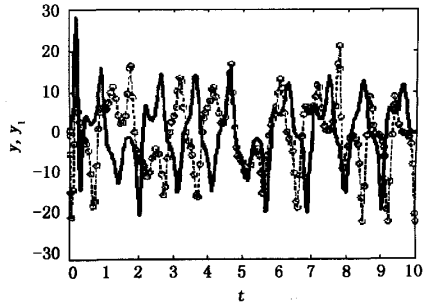
取期望的闭环特征值为: $\lambda_1 = -36, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$. 可以求得控制项

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36(y_1 - y) \\ -22(y_1 - y) - y + (x_1 z_1 - xz) \\ -(x_1 y_1 - xy) \end{bmatrix}$$

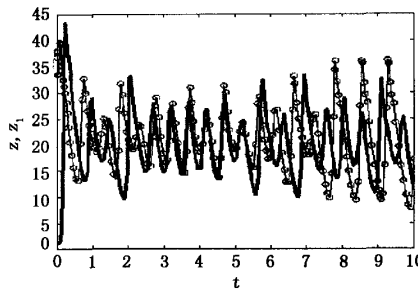
控制项 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ 取为上述值, 计算机模拟结果如图5.



(a) $x, x_1 - t$



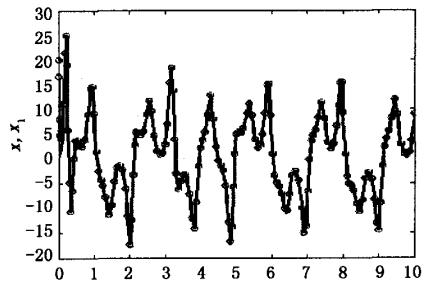
(b) $y, y_1 - t$



(c) $z, z_1 - t$

图4 无控制作用时两系统解的轨迹图

Fig.4 Trajectories of two systems without control



(a) $x, x_1 - t$

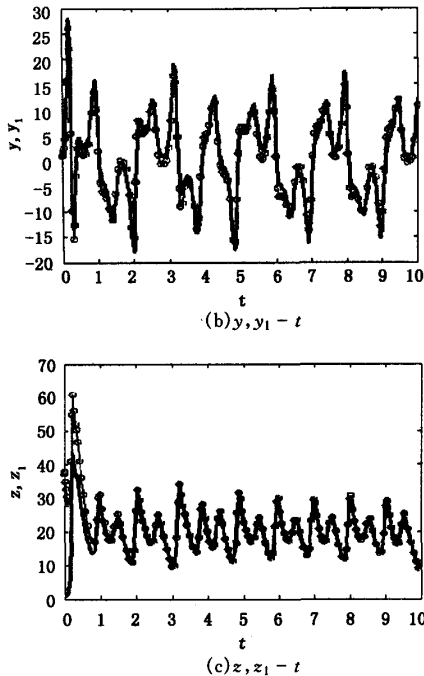


图5 有控制作用时两系统解的轨迹图

Fig. 5 Trajectories of two systems with control

从图5可以看出,具有不同参数的混沌系统用此方法也可以实现混沌同步。

4 结论

本文中给出了一种全同混沌系统以及非全同

混沌系统混沌同步的同步方法,并且给出了两个具体的数值例子.基于这种方法可有效的实现两个全同或非全同混沌系统之间平衡点、周期、混沌等状态的同步,且其同步是全局渐近稳定的。

参 考 文 献

- 1 Bai Erwei, Lonngren Karle. Synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos Solitons & Fractals*, 1997, 8: 51~58
- 2 Bai Erwei, Lonngren Karle. Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos Solitons & Fractals*, 2000, 11: 1041~1044
- 3 Agiza HN, Yassen MT. Synchronization of Rossler and chen dynamical systems using active control. *Physics Letters A*, 2001, 278: 191~197
- 4 王光瑞,于熙龄.混沌的控制、同步与利用.北京:国防工业出版社,2001 (Wang Guangrui, Yu Xiling. Control, Synchronization and Using of Chaos. Beijing: Press of National Defence Industry, 2001 (in Chinese))
- 5 郑大中.线性系统理论.北京:清华大学出版社,1992 (Zheng Dazhong. Linear System Theory. Beijing: Press of Tsinghua University, 1992 (in Chinese))
- 6 Lv Jinhu, Chen Guanrong, Zhang Suochun. Dynamical analysis of a new chaotic attractor. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 1001~1015

CHAOS SYNCHRONIZATION CONTROL OF CONTINUOUS CHAOTIC SYSTEMS

Chen baoying¹ Bao fangxun²

(1. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

(2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract This paper presented a method that can achieve chaos synchronization of chaotic systems. The method transformed the synchronization problems into the asymptotic stability questions of the 0 solution of the linear systems, and then gave the control variable according to the control theory of linear system. This method is simple and can achieve chaos synchronization of two chaotic systems efficiently. The synchronization is overall asymptotic stable. The basic theory and the numerical experiments of two identical and nonidentical chaotic systems were performed.

Key words identical chaotic system, nonidentical chaotic system, chaos synchronization, overall asymptotic stable