第 2 卷第 3 期　　动 力 学 与 控 制 学 报　　Vol. 2 No. 3
2004 年 9 月　　JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL　　Sep. 2004

长度慢变的单摆的渐近解的比较

蔡建平[1,2]　李怡平[2]
（1. 漳州师范学院数学系，漳州　363000）　（2. 中山大学数学系，广州　510275）

摘要　应用 Kuzmak-Luke 的多尺度法求得长度慢变的单摆的渐近解，并与 KBM 法、椭圆 KB 法的结果进行比较. 数值算例表明 Kuzmak-Luke 的多尺度法比 KBM 法、椭圆 KB 法更精确.

关键词　非线性振动，多尺度法，KBM 法，椭圆 KB 法

引言

对于长度慢变的单摆

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l^2(\tilde{t})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(l(\tilde{t})\theta)+ g(l(\tilde{t})\sin\theta = 0 \tag{1}$$

其中 θ 是摆偏离垂直方向的角度，g 是重力加速度，$l(\tilde{t})$ 是慢变长度，$\tilde{t}=\varepsilon t$ 是慢尺度而 μ 是磨擦系数，KBM 法[1]、椭圆 KB(EKB) 法[2] 和多尺度法(Nayfeh)[3] 都是有效的方法. 但在实际应用中，我们发现大多数情况下 Kuzmak-Luke 的多尺度法[4~5] 得到的渐近解解比 KBM 法、EKB 法更精确. 本文给出一典型例子，长度慢变的单摆的几种渐近解的比较. Kuzmak-Luke 的多尺度法用于推得方程(1) 的渐近解，其振幅由代数方程表示，比文[2] 的结果易于求解. 几种方法的首阶渐近解的比较表明，Kuzmak-Luke 的多尺度法比 KBM 法、EKB 法更精确.

1　Kuzmak-Luke 的多尺度法

首先考虑带慢变参数的立方非线性振动系统

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\varepsilon k(y,\tilde{t})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^3=0 \tag{2}$$

其中 $\tilde{t}=\varepsilon t$ 是慢变尺度. 假设方程(2) 的解具有如下渐近展开式

$$y(t,\varepsilon)=y_0(t^+,\tilde{t})+\varepsilon y_1(t^+,\tilde{t})+ \varepsilon^2 y_2(t+,\tilde{t})+\cdots \tag{3}$$

其中的快变尺度 t^+ 按照 Kuzmak[3] 的定义为 $\frac{\mathrm{d}t^+}{\mathrm{d}t}=\omega(\tilde{t})$，其中 $\omega(\tilde{t})$ 为待定函数，它由方程解的周期性质所决定. 设周期规范为 1，其简化的表达式为

$$\omega(\tilde{t})=\frac{c}{\int_0^1 f_\varphi^2\mathrm{d}\varphi}\exp(-\int_0^{\tilde{t}}k(y_r,\tau)\mathrm{d}\tau) \tag{4}$$

其中 y_r 是振荡中心，记 $y_0=f(\varphi,\tilde{t})$ 是首阶近似解，而 $\varphi=t^++\varphi_0$，常数 c 和 φ_0 由系统的初始条件确定，详细的推导见作者的另一文章[6].

将展开式(3) 代入方程(2) 得到首阶方程

$$\omega^2(\tilde{t})\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^{+2}}+a(\tilde{t})y_0+b(\tilde{t})y_0^3=0 \tag{5}$$

其能量积分为

$$\frac{\omega^2(\tilde{t})}{2}(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^+})^2 V(y_0,a,b)=E_0\tilde{t} \tag{6}$$

式中

$$V(y_0,a,b)=\frac{1}{2}a(\tilde{t})y_0^2+\frac{1}{4}b(\tilde{t})y_0^4$$

为系统势能，而 $E_0(\tilde{t})$ 为系统的慢变能量. 当 $a(\tilde{t})>0$ 且 $b(\tilde{t})<0$ 时(振荡中心 $y_r=0$)，对方程(6) 再积分一次可以解出 y_0 是 t^+ 的椭圆正弦函数

$$y_0=A_0(\tilde{t})\mathrm{sn}[K(v)\varphi,v(\tilde{t})] \tag{7}$$

其中 $\varphi=t^+\varphi_0$，常数 φ_0 由初值决定，$K(v)$ 是关于模数 $\sqrt{v}$ 的第一类完全椭圆积分，而

$$A_0=\sqrt{\frac{-2av}{b(1+v)}} \tag{8}$$

其中模数 v 由方程

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3}=\frac{c^2b^2}{4a^3}\exp(-2\int_0^{\tilde{t}}k(0,\tau)\mathrm{d}\tau)$$

确定. 其中常数 c 由初值确定，而

2004-07-03 收到第 1 稿，2004-09-05 收到修改稿.

$$L(v)=\int_0^K cn^2(u,v)dn^2(u,v)\mathrm{d}u=\frac{1}{3v}[(1+v)E(v)-(1-v)K(v)]$$

其中 $E(v)$ 是关于模数$\sqrt{v}$ 的第二类完全积分.

取 $\sin\theta\approx\theta-\frac{1}{6}\theta^3$,方程(1)化为方程(2)的类型

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\left(\frac{2l'(\tilde{t})}{l(\tilde{t})}+\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{1}{l(\tilde{t})}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\varepsilon\frac{\mu l'(\tilde{t})}{l^2(\tilde{t})}\theta+\frac{g}{l(\tilde{t})}\theta-\frac{g}{6l(\tilde{t})}\theta^3=0 \qquad (9)$$

其中 $l'=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tilde{t}}$,其振幅的首次近似 $A_0=\sqrt{\frac{12v}{1+v}}$, v 由方程

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3}=\frac{c^2}{144gl(\tilde{t})^3}\times\exp\left(-\frac{2\mu}{\varepsilon}\int_0^{\tilde{t}}\frac{1}{l(\tau)}\mathrm{d}\tau\right)$$

确定.

2　KBM 法和 EKB 法

用KBM 法求得(9)的振幅 a 的首次近似为[1]

$$a=a_0\left(\frac{l(0)}{l(\tilde{t})}\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{\mu}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{l(\tilde{t})}\right)$$

其中 a_0 是初始振幅.用EKB法求得式(9)的振幅 a 的首次近似满足方程[2]

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-\alpha a\left(\frac{\mu}{2l(\tilde{t})}+\frac{3\varepsilon l'(\tilde{t})}{4l(\tilde{t})}a\right)$$

其中 $\alpha=2((\sigma^2+1)\frac{E(\sigma^2)}{K(\sigma^2)}+\sigma^2-1)/(3\sigma^2(1-\sigma^2))$, $\sigma^2=\sigma^2(a)=a^2/(12-a^2)$.

3　算例

例 1　考虑当 $l(\tilde{t})=1+\tilde{t}$, $\mu=0.01$ 和 $g=9.8$ 时,方程(9)为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\left(\frac{2}{1+\varepsilon t}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{0.01}{1+\varepsilon t}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\varepsilon\left(\frac{0.01}{(1+\varepsilon t)^2}\right)\theta+\frac{9.8}{1+\varepsilon t}\theta-\frac{9.8}{6(1+\varepsilon t)}\theta^3=0$$

$$\theta(0)=\frac{1}{3}\pi,\ \dot{\theta}(0)=0$$

当 $\varepsilon=0.02$ 时,用多尺度法、KBM 法、EKB 法和数值方法求得振幅的首次近似的比较见图 1. 本文有关的计算和作图是利用软件 Mathematica 完成的.

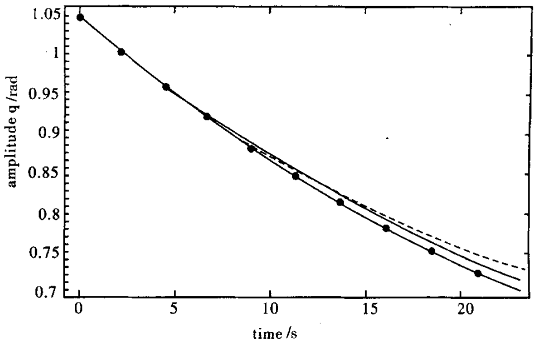

图 1　时间与振幅的关系

... 数值解;　—— Kuzmak-Luke 的多尺度法;

—— KBM 法;　--- EKB 法

Fig. 1　Time (Second) versus amplitude (Radian)

... numerical solution;

—— multiple scales method of Kuzmak-Luke;

—— KBM method;　--- EKB method

例 2　对于例 1,当 $\mu=0.02$ 和 $\varepsilon=0.05$ 时,方程(9)用多尺度法,KBM 法和 EKB 法和数值方法求得振幅的首次近似的比较见图 2.

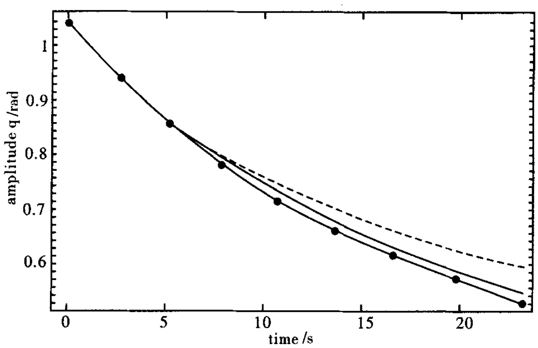

图 2　时间与振幅的关系

... 数值解;　—— Kuzmak-Luke 的多尺度法;

—— KBM 法;　--- EKB 法

Fig. 2　Time (Second) versus amplitude (Radian)

... numerical solution;

—— multiple scales method of Kuzmak-Luke;

—— KBM method;　--- EKB method

从图 1 和图 2 可以看出,Kuzmak-Luke 的多尺度法与数值解几乎一致而 KBM 法和 EKB 法都有小误差.

4 结论

多尺度法、KBM 法和 EKB 法对长度慢变的单摆都是有效的方法，但 Kuzmak-Luke 的多尺度法比 KBM 法、EKB 法更精确. 对于近似振幅，Kuzmak-Luke 的多尺度法比 EKB 法更易于计算，而 KBM 法仅对弱非线性振动有效.

参 考 文 献

1 Bogoliubov NN, Mitropolsky YA. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Delhi: Hindustan Publishing Co, 1961

2 Yuste SB. On Duffing oscillators with slowly varying parameters. *Int J Non-Linear Mech*, 1991, 26(5): 671～677

3 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1979

4 Kuzmak GZ. Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients. *Prikl Mat Meh*, 1959, 23: 515～526(Russian)

5 Luke JC. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problem. *Proc Roy Soc London Ser A*, 1966, 292: 403～412

6 Li YP. Elapsed time of periodic motion with negative damping. *Appl Math Mech*, 1992, 13(8): 719～723

COMPARISON OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF PENDULUM WITH SLOWLY VARYING LENGTH

Cai Jianping[1,2] Li Yiping[2]

(1. *Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers College, Zhangzhou* 363000, *China*)

(2. *Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou* 510275, *China*)

Abstract The multiple scales method of Kuzmak-Luke was used to obtain the asymptotic solutions of pendulum with slowly varying length, and the solutions were compared with the results of KBM and elliptic KB methods. The comparison showed that the result of the present method was more accurate than that of KBM and elliptic KB methods, although they were all effective to such problem.

Key words nonlinear oscillation, multiple scales method, KBM method, elliptic KB method

Received 03 July 2004, revised 05 September 2004