第 2 卷第 3 期
2004 年 9 月
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 2 No. 3
Sep. 2004

受控磁悬浮系统非线性随机响应分析*

姚 宏 邹 毅 李 颖
（西安空军工程大学文理学院数理系，西安 710000）

摘要 讨论了非线性磁悬浮控制系统随机振动响应预测问题. 基于等效非线性微分方程方法，从理论上对非线性磁悬浮控制系统的随机响应进行了深入分析，建立了此高维系统非线性模型；根据中心流形理论对系统进行约化、降维，给出了此系统响应的近似解析解. 这对此系统实现进一步稳定控制提供了有效的理论依据.

关键词 磁悬浮，随机响应，控制系统，预测

引言

对于非线性控制系统，从非线性振动理论可知，其中存在许多线性系统中不会出现的现象，即所谓本质非线性现象，比如跳跃、自激振动、亚谐与高谐振动、混沌等. 在这种情况下，如用线性理论预测存在本质不稳定的非线性系统的随机响应，往往会给出不正确的结论. 应当指出，虽然目前已有许多预测非线性系统随机响应的方法[1,2]，但没有一个是十分令人满意的，尤其对多自由度非线性系统，对随机扰动下非线性系统的定性性态方面，了解甚少，特别在系统存在本质非线性现象时. 因此，非线性系统随机振动仍是今后一个重要研究课题.

磁悬浮控制系统是一种具有本质不稳定的非线性系统[3,4]，由于存在随机激励，其振幅往往没有一定的限制，大幅度的响应有可能出现，虽然可能性比较小，但是它与系统结构损坏息息相关. 由于此系统的研究涉及电磁学、控制理论、转子动力学、电子学等多门学科的交叉，同时实际系统维数较高，因此其理论研究难度较大，到目前为止，几乎没有关于随机响应理论分析的研究报告. 这样，研究此系统的随机振动，预测此系统随机响应，揭示它在随机扰动下可能发生的现象，具有非常重要的意义.

1 磁悬浮控制系统模型

对于非线性磁悬浮控制随机系统，根据此系统固有的非线性特性和磁力的强非线性作用，当考虑磁力的高次非线性项时，且只考虑水平方向，采用电流控制时，其模型为

$$m\ddot{x}_{11} + c_{11}\dot{x}_{11} = F + \zeta(t) = \frac{\mu_0 n^2 S}{4}\left[\left(\frac{I_0 - i}{d - x_{11}}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{I_0 - i}{d + x_{11}}\right)^2\right] + \zeta(t) \tag{1}$$

式中 m 为质量，c_{11} 为阻尼系数，μ_0 为真空磁导率，n 为线圈匝数，S 为磁极面积；I_0 为偏置电流，d 为标准间隙；i 为由位移引起的控制电流，$\zeta(t)$ 为强度为 $2D$ 的物理高斯白噪声.

线圈的控制电压由线性控制律决定

$$U = d_p x_1 + k_d \dot{x}_1 \tag{2}$$

由于磁力为一个非线性函数，展开后经过整理，且令

$$c_{11}/m = c,\ I_0^2\mu_0 n^2 S/4md^3 = \beta,\ i/I_0 = y,\ x_{11}/d = x,\ k_d d/I_0 = a_d,\ k_p d/I_0 = a_p,\ R/L = \alpha,\ x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = y \tag{3}$$

则此系统的无量纲状态方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4\beta x_1 - cx_2 - 2\beta x_1^3 + 8\beta x_1^3 - 6\beta x_1^2 x_3 + \beta x_1 x_3^2 + \omega(t) \\ \dot{x}_3 &= k_1 x_2 + k_2 x_1 - k_3 x_3 \end{aligned} \tag{4}$$

2 磁悬浮控制系统的约化

如上所述，对于多维非线性系统，从理论上对其在随机扰动下的响应分析很困难，到目前为止，还没有一种令人满意的方法. 在此，根据非线性动力学理论，通过用中心流形理论[6] 将磁悬浮控制系统降维，从理论上进一步预测此高维系统的随机

2004-08-01 收到第 1 稿，2004-09-02 收到修改稿.

响应.考虑非线性自治系统(4),根据中心流形方法,系统(4)在其平衡点处的线性化系统为

$$\boldsymbol{DF}(X)=\begin{bmatrix}0&1&0\\4\beta&-c&-2\beta\\k_2&k_1&-k_3\end{bmatrix}\qquad(5)$$

它的特征方程为

$$\lambda(\lambda+c)(\lambda+k_3)+2\beta k_2+2\beta\lambda k_1-4\beta(\lambda+k_3)=0\qquad(6)$$

当 $2\beta k_2-4\beta k_3=0$,即 $k_2=2k_3$ 时,系统有一个零特征值,而另外两个特征值为

$$\lambda_{2,3}=\frac{(c+k_3)\pm\sqrt{(c+k_3)^2-4(ck_3+2\beta k_1-4\beta)}}{2}\qquad(7)$$

令 $b_1=c+k_3,b_2=\sqrt{(c+k_3)^2-4(ck_3+2\beta k_1-4\beta)}$ 则

$$\lambda_{2,3}=\frac{b_1\pm b_2}{2}\qquad(8)$$

根据中心流形定理,令:$\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$,且作 $X=\boldsymbol{TY}$ 变换,有

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&\dfrac{b_1+b_2}{2}&\dfrac{b_1-b_2}{2}\\2&\dfrac{4k_3+k_1(b_1+b_2)}{2k_3+b_1+b_2}&\dfrac{4k_3+k_1(b_1-b_2)}{2k_3+b_1-b_2}\end{bmatrix}\qquad(9)$$

且令,$a_1=b_1+b_2,a_2=b_1-b_2$,则有

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&\dfrac{a_1}{2}&\dfrac{a_2}{2}\\2&\dfrac{4k_3+k_1a_1}{2k_3+a_1}&\dfrac{4k_3+k_1a_2}{2k_3+a_2}\end{bmatrix}\qquad(10)$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{4k_3a_1+k_1a_1a_2+8k_3^2+4k_3a_2}{(k_1-2)a_2a_1}&\dfrac{4k_3}{a_1a_2}&-\dfrac{(2k_3+a_2)(2k_3+a_1)}{c_2(a+c)}\\2\dfrac{(2k_3+a_2)(2k_3+a_1)}{a_1\%1}&\dfrac{2k_3+a_1}{a_1-a_2)a_1}&-\dfrac{(2k_3+a_2)(2k_3+a_1)}{a_1\%1}\\-2\dfrac{(2k_3+a_2)(2k_3+a_1)}{a_2\%1}&-2\dfrac{2k_3+a_2}{(a_1-a_20a_2}&\dfrac{(2k_3+a_2)(2k_3+a_1)}{a_2\%1}\end{bmatrix}\qquad(11)$$

其中 $\%1=k_1a_1-k_1a_2-2a_1$.则系统可转换成

$$\begin{bmatrix}\dot y_1\\\dot y_2\\\dot y_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{DT}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}+\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}0\\8\beta x_1^3-6\beta x_3x_1^2+\beta x_1x_3^2+\omega(t)\\0\end{bmatrix}\qquad(12)$$

其中

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1+y_2+y_3\\(a_1y_1/2)+(a_2y_3/2)\\2y_1+(4k_3+a_1k_1)/(2k_3+a_1)+(4k_3+k_1a_2)/(2k_3+a_2)\end{bmatrix}\qquad(13)$$

经过进一步变换、推导可得降维后系统

$$\ddot y_2-S_1y_2-S_2\dot y_2-S_3y_2^3-S_4\dot y_2y_2^2-S_5y_2\dot y_2^2-S_6\dot y_2^3+o(y_2^4)=\zeta(t)\qquad(14)$$

上式中系数 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6 为推导数值.

3　等效非线性微分方程法[7]

等效非线性微分方程法是等效线性化方法的一种推广.此方法的思想是以某个具有精确稳态解的非线性系统代替给定的非线性系统,使得两个方程之差在某种统计或平均意义上为最小.设给定如下含非线性阻尼的系统

$$\ddot Y+b(Y,\dot Y)\mathrm{sgn}(\dot Y)+Y=\zeta(t)\qquad(15)$$

式中 $\zeta(t)$ 是强度为 $2D$ 的物理高斯白噪声,而

$$b(Y,\dot Y)=\sum_{i,j}^{N}b_{ij}\mid Y^i\dot Y^j\mid\qquad(16)$$

用下列非线性阻尼能量依赖系统近似代替系统(15)

$$\ddot Y+f(H)\dot Y+Y=\zeta(t)\qquad(17)$$

并选取

$$f(H)=\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}(2H)^{(i+j-1)/2}=\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}A^{(i+j-1)}\qquad(18)$$

式中

$$2H=Y^2+\dot Y^2=A^2\qquad(19)$$

原系统与等效系统之差为

$$e=f(H)\dot Y-b(Y,\dot Y)\mathrm{sgn}(\dot Y)\qquad(20)$$

为了达到最佳替代,需使

$$E[e^2]=E[\{f(H)\dot Y-b(Y,\dot Y)\mathrm{sgn}(\dot Y)\}^2\to\min\qquad(21)$$

由此可得确定系数 C_{ij} 的 N^2 个方程.

为导出 C_{ij} 的显式,作变换

$$Y = A\cos\phi, \dot{Y} = A\sin\phi \quad (22)$$

将式(22)代入式(21),得

$$E[\{f(A_2/2)A\sin\phi - b(A\cos\phi, A\sin\phi)\cdot\mathrm{sgn}(\sin\phi)\}A^{i+1}\sin\phi] = 0, \quad i,j = 1,2,\cdots,N \quad (23)$$

由于 A 与 ϕ 的概率密度可分离,且 ϕ 在$[0,2\pi)$上均匀分布,选取

$$C_{ij} = b_{ij}\int_0^{\pi/2}\cos^i\phi\sin^{j+1}\phi\mathrm{d}\phi\Big/\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi = \frac{2}{\pi}b_{ij}\Gamma\{(j+2)/2\}\Gamma\{(i+1)/2\}/\Gamma\{(i+j+3)/2\} \quad i,j = 1,2,\cdots,N \quad (24)$$

可使式(23)满足.

确定 $f(H)$ 后,等效能量依赖系统(17)的精确稳态解

$$\rho_s(a,\varphi) = C\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{D}\int_0^{a^2/2}f(y)\mathrm{d}u) \quad (25)$$

可作为式(15)的近似解,式中 $f(u)$ 由式(16)确定,其中 C_{ij} 由式(24)确定.常数 C 则由归一化条件确定.

4 非线性磁悬浮控制系统随机响应

根据等效非线性微分方程法,把式(14)与如下标准形式

$$\ddot{Y} + b(Y,\dot{Y})\mathrm{sgn}(\dot{Y}) + Y = \zeta(t) \quad (26)$$

对照,以及用以下非线性能量系统近似代替

$$\ddot{Y} + f(H)\dot{Y} + Y = \zeta(t) \quad (27)$$

且根据

$$b(Y,\dot{Y}) = \sum_{i,j}^{N} b_{ij}\mid Y^i\dot{Y}^j\mid$$

$$f(H) = \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij}(2H)^{(i+j-1)/2}$$

式中 $2H = Y^2 + \dot{Y}^2 = A^2$

$$C_{ij} = \frac{2}{\pi}b_{ij}\Gamma\{(j+2)/2\}\Gamma\{(i+1)/2\}/\Gamma\{(i+j+3)/2\}$$

于是可得

$b_{01} = S_2, b_{03} = S_6, b_{10} = S_1, b_{12} = S_5, b_{21} = S_3, b_{30} = S$,其余 $b_{ij} = 0$;$C_{01} = b_{01}, C_{03} = \frac{3}{4}b_{03}, C_{10} = \frac{2}{\pi}b_{10}, C_{12} = \frac{1}{\pi}b_{12}, C_{21} = \frac{1}{4}b_{21}, C_{30} = \frac{1}{\pi}b_{30}$,其余 $C_{ij} = 0$.则 $f(H) = q_1 + q_2(2H)$,其中 $q_1 = C_{01} + C_{10}, q_2 = C_{03} + C_{12} + C_{21} + C_{30}$,系统(14)的等效能量依赖系统为

$$\ddot{Y} + [q_1 + q_2(2H)]\dot{Y} + Y = \zeta(t) \quad (28)$$

这样,系统(28)的精确稳态概率密度,即为系统(14)的近似稳态概率密度为

$$\rho_s(a) = C\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2D})[q_1a^2 + \frac{1}{8}q_2a^4] \quad (29)$$

其中,C 由归一化条件确定,且

$$\frac{1}{C} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\Gamma(3/4)(q_2/D)^{(1/4)}}\exp(q_1^2/Dq_2)$$

则其近似稳态概率密度为

$$\rho_s(a) = \frac{4\Gamma(3/4)(q_2/D)^{(1/4)}}{2\sqrt{2}\pi}\exp(q_1^2 + Dq_2 - \frac{1}{2D})[q_1a^2 + \frac{1}{8}q_2a^4] \quad (30)$$

5 结果分析

从上述分析可见,对于本质不稳定的非线性磁悬浮控制系统,由于综合考虑机械和控制的影响,使系统维数增加,不能直接用现有的方法从理论上对此系统的随机响应进行预测.为此,应用非线性动力学理论,首先对系统进行约化,并保证其非线性性态不改变,即对系统进行降维,然后用等效非线性微分方程方法进行分析,理论上得到非线性磁悬浮控制系统近似的稳态概率密度近似解析解.这对系统进一步实现稳定控制提供了有意义的理论依据,同时也提出了一种高维非线性控制系统随机响应预测的分析思路.

参考文献

1 Caughcy TK. On the response of nonlinear oscillators to stochastic excitation. *Prob Eng Mech*, 1986, (1): 2~4

2 Zhu WQ, Yu JS. The equivalent nonlinear system method. *J Sound Vib*, 1989, 129(2): 385~395

3 Pugnet JM, Bolusset D, Jehi J. The application of dry seal and active magnetic bearings to an all - free centrifugal compressor. *Inst Mech Eng Cof Proceedings*, 1987, 35~42

4 McCloskey T, Jones G. Magnetic bearing projects in the USA electric utility industry. Fourth International Symposium on Magnetic Bearing. *ETH Eurich*, 1994, 455~462

5 Hong Y, X Jianxue. The research on dynamical behavior and design about control parameters for nonlinear magnetic control system. *Chinese Journal of Aeronautics*, 1999, 12 (1): 25~29

6 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations dynamical systems, and bifurcation of vector fields, New York: Spring - vrelag, 1991

7 朱位秋.随机振动.北京:科学出版社,1998(Zhu WQ. Random Vibration. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese))

ANALYSIS ON NONLINEAR RANDOM RESPONSE OF CONTROLLED MAGNETIC LEVITATION SYSTEM

Yao Hong　Zou Yi　Li Ying

(*College of Arts and Science, Xi' an Air Force Engineering University, Xi' an*　710000, *China*)

Abstract　The response of the nonlinear magnetic levitation control system to random vibration was discussed. Based on the equivalent method of nonlinear differential equation, this paper gave a deep theoretical analysis on the random response of nonlinear magnetic levitation control system; and a nonlinear model of the multidimensional system was presented. Using the flow form theorem, an approximate analysis solution of the system's response was achieved. So this work provides a valid theoretical basis for realizing further improvement on stability control.

Key words　magnetic levitation, random response, control system, prediction

Received 01 August 2004, revised 02 September 2004