

面向控制的压电主动结构建模方法

董兴建 孟光

(上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030)

摘要 以压电悬臂板为分析对象,通过对系统输入-输出数据作变换处理,隐式地设计最小拍状态观测器,基于状态观测器的 Markov 参数计算系统 Markov 参数,亦即系统脉冲响应采样值,然后采用特征系统实现算法辨识得到系统最小实现,所建立的智能结构的状态空间模型能控、能观,为控制器设计提供了一个较为精确的数学模型。

关键词 压电,主动结构,特征系统实现算法,辨识,状态观测器

引言

在压电主动结构的设计与分析中,动力学建模和控制器设计是两个重要环节.有限元方法是建立压电主动结构动力学模型的一种有效手段,且有相当的精度^[1~5],但是有限元方法得到的模型阶次非常高,无法直接用于控制器设计.为了将有限元方法建立的动力学模型用于控制器设计,通常可遵循两条技术路线,一是模型降阶,二是系统辨识.

在振动主动控制中采用的模型降阶方法主要有:平衡降阶法(Balanced Reduction)、代价分析法(Cost Analysis)以及最优投影法(Optimal Projection),这些方法应用 Rayleigh-Ritz 优化法以及矩阵变换,对受控对象的特征结构进行简洁描述,剔除系统中不能控、不能观的状态,但是这些方法依赖于模型的状态空间描述,难以对维数过高的有限元模型实施降阶^[6].

系统辨识方法将结构系统作为一个整体进行处理,直接获得系统的降阶模型,主要包括频域辨识和时域辨识两类方法.频域方法对实测系统的频响函数进行拟合,物理上简单直观,得到的系统模型其幅频特性与实测的频响函数较为符合,但相频特性有较大的差距,而且传递函数模型不便于向状态空间模型转换,实现频域的 MIMO 辨识比较困难.时域方法直接根据时域振动信号进行辨识,其中 NASA Langley 研究中心的研究人员提出的特征系统实现算法(Eigensystem Realization Algorithm, ERA)是一种适用于 MIMO 辨识的较为先进的时域方法^[7~9],该方法一经提出便应用于 Galileo 航天飞机的模态分析. ERA 方法对模型的

结构和阶次不作任何预假设,根据系统的脉冲响应构造 Hankel 分块矩阵并运用奇异值分解技术得到便于控制器设计的系统最小实现,其主要缺点是难于得到理想的脉冲响应数据.文献[10]基于状态观测器的设计理论,对系统的输入-输出数据作变换处理,隐式地设计最小拍(Deadbeat)渐近状态观测器,配置观测器极点,通过一组数目相对较少的状态观测器的 Markov 参数便可以得到系统的脉冲响应数据.

以一块压电悬臂板为分析对象,首先采用有限元方法计算滤过白噪声激励下结构的响应,将有限元分析结果代替实验数据用于辨识系统的状态空间模型.基于最小拍状态观测器的 Markov 参数计算系统脉冲响应,采用 ERA 方法进行系统辨识,得到系统的最小实现,这样使得 ERA 方法可以采用任意输入-输出数据,而不局限于脉冲响应数据,并且得到的状态空间模型能控、能观,为后续的控制设计器和系统动态仿真提供了较为准确的数学模型.

1 基于状态观测器的脉冲响应计算方法

对于离散多变量线性时不变系统 $\Sigma_1 = (A, B, C, D)$,可用状态空间方程表示为

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) \\y(i) &= Cx(i) + Du(i)\end{aligned}\quad (1)$$

其中 $x(i) \in R^n, y(i) \in R^q, u(i) \in R^m, A, B, C$ 和 D 分别称为系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵和直接传递矩阵,在零初始条件下,系统 Σ_1 的响应用 Markov 参数表示为

2004-06-14 收到第1稿,2004-09-01 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(50390063);国防科技重点实验室基金资助项目(51463040403JW0301)

$$y(i) = \sum_{\tau=0}^{i-1} Y_{\tau} u(i - \tau - 1) + Du(i) \quad (2)$$

式中 $Y_{\tau} = CA^{\tau}B$, Y_{τ} 和 D 为系统 Σ_1 的 Markov 参数,式(2)是 Σ_1 的滑动平均(MA)模型,为描述 i 时刻的输出,共需要 $i + 1$ 个 Markov 参数.假定系统 Σ_1 能观,构造渐近状态观测器

$$\begin{aligned} \hat{x}(i+1) &= A\hat{x}(i) + Bu(i) - \\ &M[y(i) - \hat{y}(i)] = \\ &(A + MC)\hat{x}(i) + \\ &(B + MD)u(i) - My(i) \quad (3) \\ \hat{y}(i) &= C\hat{x}(i) + Du(i) \end{aligned}$$

M 为状态观测器的增益矩阵,通过矩阵 M 可任意配置 $A + MC$ 的特征值,使得观测器的状态 \hat{x} 渐近地逼近实际状态 x ,状态逼近的速度取决于 M 的选取和 $A + MC$ 特征值的配置.这里将 $A + MC$ 的特征值配置在复平面的原点,即所谓最小拍(Deadbeat)状态观测器,此时观测器的状态 \hat{x} 逼近实际状态 x 的速度最快,当 i 趋于无穷, $\hat{x}(i)$ 将趋于 $x(i)$,式(3)可写为

$$\begin{aligned} x(i+1) &= (A + MC)x(i) + \\ &(B + MD)u(i) + My(i) \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i) \quad (4) \end{aligned}$$

记式(4)表征的系统为 Σ_2 , Σ_2 和 Σ_1 等价.在零初始条件下,系统 Σ_2 的响应为

$$y(i) = \sum_{\tau=0}^{i-1} \bar{Y}_{\tau} [u(i - \tau - 1),$$

$$\hat{y}(i) = \hat{y}(i - 1) + \Delta\hat{y}(i - 1) \quad (8a)$$

$$\Delta\hat{y}(i - 1) = \left[\frac{\Re(i - 2)\Gamma(i - 1)[y(i) - \hat{y}(i - 1)\Gamma(i - 1)]^T}{1 + \Gamma(i - 1)^T\Re(i - 2)\Gamma(i - 1)} \right]^T \quad (8b)$$

$$\Re(i - 1) = \Re(i - 2) - \frac{\Re(i - 2)\Gamma(i - 1)\Gamma(i - 1)^T\Re(i - 2)}{1 + \Gamma(i - 1)^T\Re(i - 2)\Gamma(i - 1)} \quad (8c)$$

其中 $\hat{y}(i)$ 为参数 γ 在第 i 个采样时刻的估计值.

由输入 - 输出采样数据可辨识参数 γ ,从而得到观测器 Σ_2 的 Markov 参数,通过简单的矩阵运算,可知 Σ_1 和 Σ_2 的 Markov 参数存在如下关系

$$\begin{aligned} Y_{\tau} &= CA^{\tau}B = \bar{Y}_{\tau}^{(1)} + \\ &\sum_{i=0}^{\tau-1} \bar{Y}_{\tau}^{(2)} Y_{\tau-i-1} + \bar{Y}_{\tau}^{(2)} D \quad (9) \end{aligned}$$

系统 Σ_1 的 Markov 参数亦即脉冲响应的采样值.

2 基于 ERA 方法的系统最小实现

2.1 确定 Hankel 矩阵的结构

ERA 方法是一种属于多输入多输出的时域辨

$$y(i - \tau - 1)]^T + Du(i), i \geq n \quad (5)$$

其中 \bar{Y}_{τ} 和 D 为状态观测器 Σ_2 的 Markov 参数,并有

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{\tau} &= [C(A + MC)^{\tau}(B + MD), \\ &- C(A + MC)^{\tau}M] = [\bar{Y}_{\tau}^{(1)} \quad \bar{Y}_{\tau}^{(2)}] \end{aligned}$$

式(5)可写为 ARMA(n, n) 模型的格式

$$\begin{aligned} y(i) &= \sum_{\tau=0}^{n-1} \bar{Y}_{\tau}^{(1)} u(i - \tau - 1) + \\ &\sum_{\tau=0}^{n-1} \bar{Y}_{\tau}^{(2)} y(i - \tau - 1) + Du(i) \quad (6) \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} \alpha &= [\bar{Y}_0^{(1)} \quad \bar{Y}_1^{(1)} \quad \dots \quad \bar{Y}_{n-1}^{(1)}] \\ \beta &= [\bar{Y}_0^{(2)} \quad \bar{Y}_1^{(2)} \quad \dots \quad \bar{Y}_{n-1}^{(2)}] \\ \underline{u}(i - n) &= [u(i - 1), u(i - 2), \\ &\dots, u(i - n)]^T \\ \underline{y}(i - n) &= [y(i - 1), y(i - 2), \\ &\dots, y(i - n)]^T \\ \gamma &= [\alpha \quad \beta \quad D] \end{aligned}$$

$$\Gamma(i - 1) = \begin{bmatrix} \underline{u}(i - n) \\ \underline{y}(i - n) \\ \underline{u}(i) \end{bmatrix}$$

方程(6)可写为

$$y(i) = \gamma\Gamma(i - 1) \quad (7)$$

采用递推最小二乘方法(Recursive Least-Squares)辨识未知参数 γ

识方法,它移植了自动控制理论中的最小实现理论,根据系统的脉冲响应构造 Hankel 分块矩阵,然后运用奇异值分解技术得到系统的最小实现,实施 ERA 方法时首先要确定 Hankel 矩阵的结构.

$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{L-1}$ 为系统 Σ_1 的 Markov 参数,构造如下的 Hankel 分块矩阵

$$H(l, \tau) = \begin{bmatrix} Y_{\tau} & Y_{\tau+1} & \dots & Y_{\tau+l-1} \\ Y_{\tau+1} & Y_{\tau+2} & \dots & Y_{\tau+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{\tau+l-1} & Y_{\tau+l} & \dots & Y_{\tau+2l-2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 τ 可在 0 至 $L - 2l + 1$ 之间任意选择,它决定

由哪些脉冲响应序列构成 Hankel 矩阵, l 决定 Hankel 分块矩阵的结构, l 增大到一定程度, 矩阵 $\mathbf{H}(l, \tau)$ 有不变的秩, 且此秩正好等于系统的阶次, 系统的极点数可由它确定, l 的选择准则是能获得这个不变的秩, 且矩阵 $\mathbf{H}(l, \tau)$ 的规模最小, 引入 Hankel 矩阵行列式的平均比值 D_l

$$D_l = \left| \frac{\frac{1}{L-2l+2} \sum_{\tau=0}^{L-2l+1} \det[\mathbf{H}(l, \tau)]}{\frac{1}{L-2l} \sum_{\tau=0}^{L-2l-1} \det[\mathbf{H}(l+1, \tau)]} \right| \quad (11)$$

当 l 从 1 开始逐一增加时, 不断计算 D_l 的值, 当 l 增加至 l_0 时, Hankel 矩阵由非奇异矩阵变成奇异矩阵, 其秩趋于不变, 此时分母项较分子项急剧下降, 从而使 D_l 在 $l = l_0$ 处取得极大值.

2.2 ERA 算法基本理论

对 $\mathbf{H}(l_0, 0)$ 进行奇异值分解

$$\mathbf{H}(l_0, 0) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (12)$$

式中 \mathbf{U} 为左奇异向量, \mathbf{V} 为右奇异向量, $\mathbf{\Sigma}$ 为奇异值矩阵, 即

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots) \quad (13)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \sigma_{n+1} \geq \dots \geq 0 \quad (14)$$

根据给定的阈值 ϵ 决定系统最小实现的阶数 n

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_1} > \epsilon, \quad \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1} \leq \epsilon \quad (15)$$

定义如下的 $q \times l_0 q$ 的矩阵 \mathbf{E}_q^T , $m \times l_0 m$ 的矩阵 \mathbf{E}_m^T

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_q^T &= [I_q \quad 0_{q \times (l_0-1)q}], \\ \mathbf{E}_m^T &= [I_m \quad 0_{m \times (l_0-1)m}] \end{aligned} \quad (16)$$

记 \mathbf{U}_n 为矩阵 \mathbf{U} 的前 n 列, \mathbf{V}_n^T 为矩阵 \mathbf{V} 的前 n 行, 系统的最小实现 $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}(l_0, l) \mathbf{V}_n \mathbf{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \quad (17a)$$

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_n^T \mathbf{E}_m \quad (17b)$$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{E}_q^T \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \quad (17c)$$

\mathbf{D}_r 可由式(6)采用递推最小二乘法直接得到, 于是通过 ERA 方法得到系统 Σ_1 的状态方程规范型可写为

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}(i) + \mathbf{B}_r u(i) \quad (18)$$

$$y(i) = \mathbf{C}_r \mathbf{x}(i) + \mathbf{D}_r u(i)$$

最后对矩阵 \mathbf{A}_r 进行特征值分解, 就可以求得系统的频率, 阻尼比, 模态参与因子等动力学参数, 而系统的状态空间模型用于后续的控制设计.

3 数值算例

考虑一左端固定, 表面粘贴压电片的悬臂板, 铝板尺寸为 $700\text{mm} \times 150\text{mm} \times 1.2\text{mm}$, 压电片 APC850 尺寸为 $70\text{mm} \times 15\text{mm} \times 0.5\text{mm}$, 如图 1 所示, 三片压电片作为致动器使用, 另外配置 3 个位移传感器用于测量垂直于板面的位移. 铝的材料参数如下:

$$E = 69.0 \text{ GPa}, \quad G = 27.0 \text{ GPa},$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

APC850 材料参数如下:

$$E_{11} = E_{22} = 63.0 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.35,$$

$$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3, \quad G_{12} = G_{23} = 24.6 \text{ GPa},$$

$$G_{13} = 30.6 \text{ GPa},$$

$$d_{31} = -1.75 \times 10^{-10} \text{ m/V},$$

$$d_{33} = 4.0 \times 10^{-10} \text{ m/V}$$

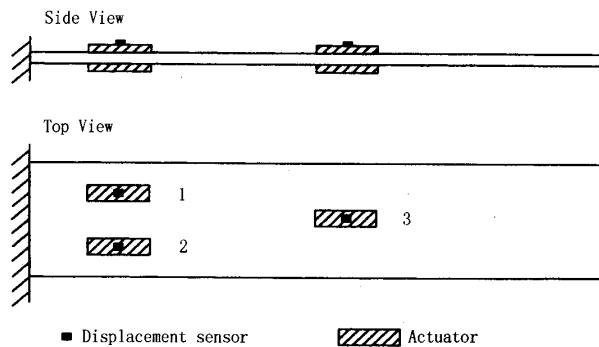


图 1 压电悬臂板模型

Fig. 1 Geometry of the active cantilever plate

系统辨识中,对于激励信号最重要的要求是它必须满足持续激励的假设,即激励信号能够激励起感兴趣频带内的所有模式.采用±100V 的滤过白噪声电压作为压电致动器的驱动信号(见图 2),给

定系统前 4 阶模态阻尼比分别为 0.8%,1.0%,1.5%,1.5%,采用模态叠加法计算 3 个传感器的位移响应,有限元分析在 MSC.Nastran 上完成.

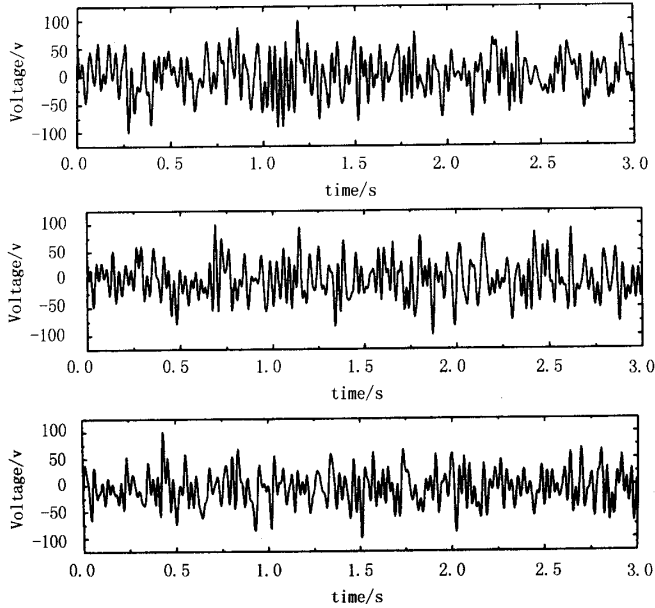


图 2 辨识用输入电压的时间序列,依次为致动器 1、2 和 3 的输入电压
Fig.2 Time history of input voltage

由式(8)得到观测器 Markov 参数,再由式(9)得到系统 Markov 参数,按式(10)构造 Hankel 矩阵,并计算 Hankel 矩阵行列式的平均比值 D_l ,当 $l = 4$ 时 D_l 取得极大值,如图 3 所示.对 $H(4,0)$ 进行奇异值分解,其奇异值分布如图 4 所示,从图中

可以看到,前 8 个奇异值较大,其余的奇异值相对很小,这表明将待辨识系统的阶数 n 取为 8 不会对原模型的动态特性造成较大的误差,于是按式(17)可得到系统的最小实现,辨识结果和有限元结果的比较见表 1.

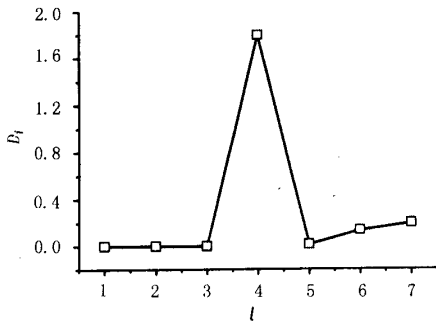


图 3 Hankel 矩阵行列式的平均比值 D_l
Fig.3 D_l of Hankel matrix

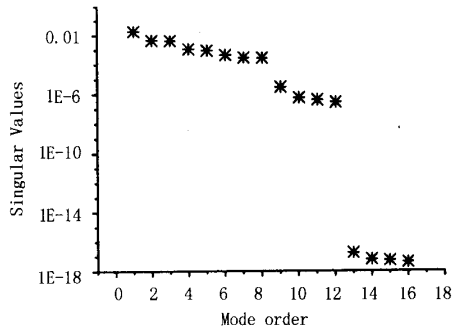


图 4 Hankel 矩阵的奇异值分布
Fig.4 Plot of Hankel matrix singular value

表 1 辨识结果与有限元结果

Tab. 1 Identified results and FEM results

Frequency/Hz	FEM				Identified			
	2.18	13.1	20.3	35.8	2.1844	13.092	20.338	35.819
Damping ratio/%	0.8	1.0	1.5	1.5	0.7898	1.0072	1.5000	1.5629

图 5 是分别采用辨识方法和有限元方法得到的系统的 Bode 图,根据 Bode 图可判断所建模型的准确性.可以看到,辨识模型的 Bode 图和有限元方法得到的 Bode 图在低频段是相当接近的,系统的最小实现反映了前 4 阶模态的动态特性,无法正确

反映高频模态的动态特性.由于系统通常工作在低频段,采用 ERA 方法辨识得到悬臂板的最小实现是可信的,可作为控制器设计的数学模型,为避免控制溢出和观测溢出,可将高频未建模动态作为系统的不确定性考虑,这正是后续的工作.

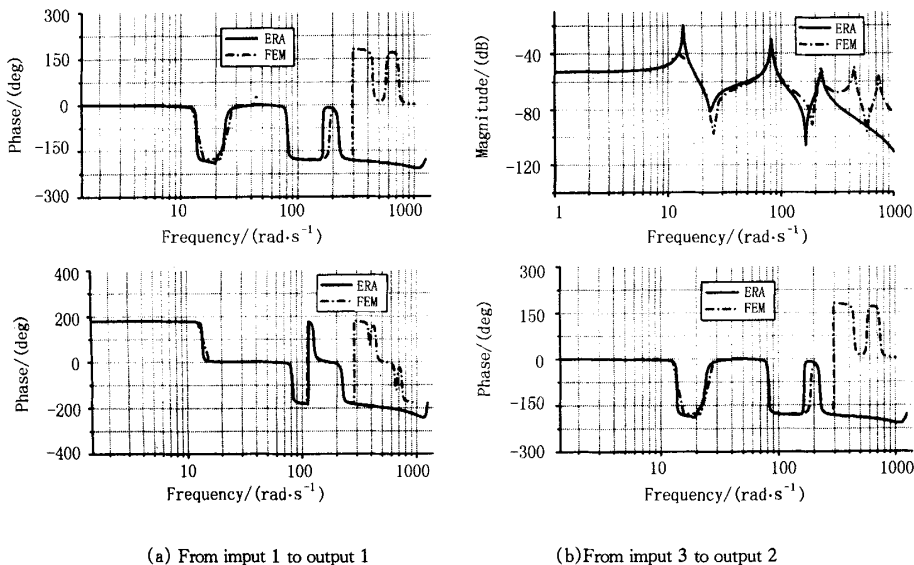


图 5 悬臂板结构的 Bode 图

Fig. 5 Bode plot of cantilever plate

4 结论

1) 直接根据式(2)由系统的输入-输出采样数据计算系统脉冲响应比较困难,计算量过大,通过构造最小拍状态观测器可得到系统的 ARMA 模型,由观测器的 Markov 参数可得到系统的脉冲响应;

2) 基于渐近状态观测器的 Markov 参数计算系统的脉冲响应,使得 ERA 方法可采用任意输入-输出数据,而不局限于单位脉冲响应;

3) 将有限元分析看作一个虚拟的实验系统,然后采用本文的辨识方法可建立主动结构的状态空间模型,也可直接将本文的方法用于实验建模,由实验数据辨识结构的状态空间模型.

参考文献

- 1 Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers & Structures*, 2000, 76: 347~363
- 2 Narayanan S, Balamurugan V. Finite element modelling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators. *Journal of sound and vibration*, 2003, 262: 529~562
- 3 Antonio Zallo, Paolo Gaudenzi. Finite element models for laminated shells with actuation capability. *Composite & Structures*, 2003, 81: 1059~1069
- 4 Xu SX, Koko TX. Finite element analysis and design of actively controlled piezoelectric smart structures. *Finite Element in Analysis and Design*, 2004, 40: 241~262
- 5 Lee YY, Yuen KK, Ng CF, Cheng GF. Numerical simula-

- tion model of vibration responses of rectangular plates embedded with piezoelectric actuators. *Thin-Walled Structures*, 2002, 40: 1~28
- 6 Yae KH, Inman DJ. Control-oriented order reduction of finite element model. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 1993, 115: 708~711
 - 7 Juang Jer-nan, Pappa Richard S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control and dynamics*, 1985, 8(5): 620~627
 - 8 Pappa Richard S, Woodard Stanley E, Juang Jer-nan. Development of autonomous structural modal identification. *Sound and Vibration*, 1997, 31(8): 18~23
 - 9 Alvin KF, Peterson LD, Park KC. Extraction of normal modes and full modal damping from complex modal parameters. *AIAA Journal*, 1997, 35: 1187~1194
 - 10 Phan MQ, Longman RW. Relationship between state-space and input-output models via observer Markov parameters. *International Conference on Dynamics and Control of Structures in Space, SPACE*, 1996, 185~200

CONTROL-ORIENTED MODELING METHOD FOR PIEZOELECTRIC ACTIVE STRUCTURES

Dong Xingjian Meng Guang

(State Key Lab of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiao Tong Univ, Shanghai 200030, China)

Abstract This paper analyzed the dynamics of a cantilever plate with piezoelectric actuators. A deadbeat state observer was achieved implicitly through processing the general input - output data, and the actual system Markov parameters were recovered from the observer Markov parameters. Then, the Eigensystem Realization Algorithm (ERA) was employed to develop an explicit state space model of the equivalent linear system. The mathematical model obtained by ERA is controllable and observable and is suitable for the purpose of controller design.

Key words piezoelectric materials; active structure; eigensystem realization algorithm; identification; state observer