

一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌*

乐源¹ 谢建华¹ 丁旺才^{1,2}

(1. 西南交通大学应用力学与工程系, 成都 610031)

(2. 兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

摘要 分析了一类两自由度碰撞振动系统的周期运动, 并通过计算 Poincaré 映射的线性化矩阵, 确定周期运动的稳定性. 分析表明, 在一定的参数条件下系统存在周期倍化分岔和 Hopf 分岔, 并通过数值模拟方法得到了以 Poincaré 截面上的不变圈表示的拟周期响应. 简明地讨论了系统通向混沌的道路.

关键词 碰撞振动, 周期运动, Poincaré 映射, Hopf 分岔, 混沌

引言

在实际工程领域中, 机械内部零部件之间的间隙存在是难以避免的. 当运动部件的振幅超出相应的临界值时, 就造成相互碰撞, 构成了强非线性振动系统. 例如: 在汽轮发电机组以及其它类似的高速旋转机械中, 转子与定子之间的碰撞摩擦行为; 高速铁路列车车轮与轨道之间的互相作用; 机器人操作部件与环境之间的互相接触和脱离过程. 这些伴随有碰撞行为的机械系统的优化设计, 应建立在对振动碰撞系统的动力学行为的全面了解的基础之上.

许多研究者对振动碰撞系统的分岔和混沌现象作了广泛的研究, 并在多方面取得了新的进展. 大量文献详细地研究了单自由度振动碰撞系统的分岔, 奇异性以及混沌现象, 另外一些文献分析了两个或多自由度振动碰撞系统的分岔和混沌现象. Natsiavas^[1] 分析了一类具有简谐激励的两自由度分段线性系统, 并通过数值模拟方法得到了拟周期响应以及它们通向混沌的道路. Ivanov^[2] 认为在有多自由度碰撞振动系统中, 当一对共轭复特征值穿越单位圆时可能存在 Hopf 分岔. 文献[3]研究了一个碰撞振子余维二分岔和 Hopf 分岔. 文献[4]建立了两自由度碰撞振动系统 Hopf 分岔的分析方法. 文献[5]讨论了一类三自由度碰撞振动系统的 Hopf-Hopf 分岔.

陆启韶、李群宏^[6] 研究了由两个振子对碰构成的碰撞振动系统, 给出了周期解的存在性、稳定性和共存性的结果. 张彦梅、陆启韶、李群宏在文献[7]中进一步研究了同一模型亚谐周期运动的存在性.

本文分析了阻尼对文献[6~7]所研究模型周期运动的存在性与稳定性的影响. 并通过数值模拟方法, 进一步研究了周期运动的倍化分岔与 Hopf 分岔现象, 得到了分别以 Poincaré 截面上周期 2 轨道和不变圈表示的次谐波响应和拟周期响应. 最后简明地讨论了系统由拟周期分岔通向混沌的道路.

1 碰撞振动系统的力学模型和振动微分方程

图 1 表示一类具有两个振子 M_1 和 M_2 的二自由度振动系统的力学模型. 其中两个质量块分别通过两个刚度为 K_1 和 K_2 的线性弹簧与刚性平面相连, 阻尼器的阻尼系数分别为 C_1 和 C_2 ; 两振子上分别加有振幅为 P_1 和 P_2 的简谐激励力. 在两弹簧处于平衡位置时, 两质块之间间距为 B , 碰撞过程的恢复系数为 R . 假定水平支持面为光滑的平面.

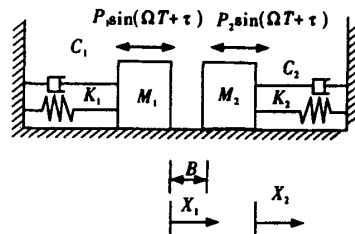


图 1 碰撞振动系统
Fig. 1 Vibro-impact system

如图 1 所示, 建立坐标. 当两质量块的坐标满足关系 $X_1 - B = X_2$ 时, 发生碰撞; 在两次碰撞之间, 两振子的坐标满足关系: $X_1 - B < X_2$.

系统的运动微分方程的无量纲化方程如下

2004-05-09 收到第 1 稿, 2004-08-04 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10072051)和教育部高等学校博士点专项科研基金资助项目(20010613001)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + 2\zeta\dot{x}_1 + x_1 &= (1 - f_2)\sin(\omega t + \tau) \\ u_m\dot{x}_2 + 2u_k\dot{x}_2 + u_c x_2 &= f_2\sin(\omega t + \tau) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $u_m = \frac{M_2}{M_1}, u_k = \frac{K_2}{K_1}, u_c = \frac{C_2}{C_1}, f_2 = \frac{P_2}{P_1 + P_2},$
 $\omega = \Omega\sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, \zeta = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}}, t = T\sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, x_i =$
 $\frac{X_i K_1}{P_1 + P_2}, (i = 1, 2).$

根据碰撞定理和碰撞过程动量守恒定律,相应的碰撞过程的前后瞬时速度满足以下方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{1+} &= a\dot{x}_{1-} + b\dot{x}_{2-} \\ \dot{x}_{2+} &= c\dot{x}_{1-} + d\dot{x}_{2-} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $a = \frac{1 - u_m R}{1 + u_m}, b = \frac{u_m(1 + R)}{1 + u_m}, c = \frac{1 + R}{1 + u_m},$
 $d = \frac{u_m - R}{1 + u_m}, \dot{x}_{i+}, \dot{x}_{i-}, (i = 1, 2)$ 分别表示两振子碰撞后和碰撞前的无量纲化后的瞬时速度.

在碰撞瞬时,两振子的无量纲化位移坐标满足以下相应方程

$$x_i - g = x_2 \quad (3)$$

式中 $g = \frac{K_1 B}{P_1 + P_2}.$

2 碰撞振动系统的周期运动和周期解

根据微分方程的相关理论,方程(1)的解可表示如下

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{-\zeta t} (A_1 \cos(\omega_{d1} t) + A_2 \sin(\omega_{d1} t)) + \\ &\quad B_1 \sin(\omega t + \tau) + B_2 \cos(\omega t + \tau) \\ x_2 &= e^{-\eta t} (A_3 \cos(\omega_{d2} t) + A_4 \sin(\omega_{d2} t)) + \\ &\quad B_3 \sin(\omega t + \tau) + B_4 \cos(\omega t + \tau) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $\eta = \frac{u_c \zeta}{u_m}, u = \frac{u_k}{u_m}, \omega_{d1} = \sqrt{1 - \zeta^2}, \omega_{d2} =$
 $\sqrt{u - \eta^2}.$

A_1, A_2, A_3, A_4 为由系统的初始条件所决定的积分常数; B_1, B_2, B_3, B_4 为振幅常数

$$B_1 = \frac{(1 - \omega^2)(1 - f_2)}{(1 - \omega^2) + 4\zeta^2 \omega^2},$$

$$B_2 = -\frac{2\zeta\omega(1 - f_2)}{(1 - \omega^2) + 4\zeta^2 \omega^2},$$

$$B_3 = \frac{(u_k - u_m \omega^2) f_2}{(u_k - u_m \omega^2)^2 + 4u_c^2 \zeta^2 \omega^2},$$

$$B_4 = -\frac{2u_c \zeta \omega f_2}{(u_k - u_m \omega^2)^2 + 4u_c^2 \zeta^2 \omega^2}$$

若取两振子在第一次碰撞后那一瞬时为时间

坐标原点($t = 0$),则在下一次两振子在同一平面相碰撞后那一瞬时,无量纲时间为 $t = \frac{2n\pi}{\omega}$,这个周期运动称为单碰周期 n 运动.其边界条件可以表示如下

$$\begin{aligned} x_{1+}(0) &= x_{1-}(\frac{2n\pi}{\omega}), \\ \dot{x}_{1+}(0) &= \dot{x}_{1+}(\frac{2n\pi}{\omega}) = a\dot{x}_{1-}(\frac{2n\pi}{\omega}) + b\dot{x}_{2-}(\frac{2n\pi}{\omega}) \\ x_{2+}(0) &= x_{2-}(\frac{2n\pi}{\omega}), \\ \dot{x}_{2+}(0) &= \dot{x}_{2+}(\frac{2n\pi}{\omega}) = c\dot{x}_{1-}(\frac{2n\pi}{\omega}) + d\dot{x}_{2-}(\frac{2n\pi}{\omega}) \\ x_{2+}(0) - x_{1+}(0) &= -g \end{aligned}$$

将振动微分方程的解式(4)代入以上边界条件,可以求得初相位角和四个积分常数的表达式(略去繁杂的推导过程和各表达式结果);并可以由初相位角的表达式以及推导过程得到周期运动的存在条件.

把初相位角以及各积分常数表达式代入微分方程的解式(6),得到碰撞振动系统的周期解的表达式

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{-\zeta t} (A_1 \cos(\omega_{d1} t) + A_2 \sin(\omega_{d1} t)) + \\ &\quad B_1 \sin(\omega t + \tau_0) + B_2 \cos(\omega t + \tau_0) \\ x_2 &= e^{-\eta t} (A_3 \cos(\omega_{d2} t) + A_4 \sin(\omega_{d2} t)) + \\ &\quad B_3 \sin(\omega t + \tau_0) + B_4 \cos(\omega t + \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

3 Poincaré 映射和周期运动的稳定性

碰撞振动系统的相空间为 $R^4 \times S^1$.并定义

$$\Sigma = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \tau) \in R^4 \times S^1 \mid x_2 - x_1 = -g\}$$

取 Σ 截面(碰撞面)为 Poincaré 截面,并取其坐标分量为 $(\dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \tau)$,建立 Poincaré 映射,则碰撞振动系统的周期运动转化为 Poincaré 映射的不动点;令系统的不动点取在两振子在第一次碰撞后的瞬时,其坐标表示式为 $(x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{20}, \tau_0)$,则周期运动的稳定性问题转化为讨论 Poincaré 映射的线性化矩阵在不动点处的特征值问题.若令 $t = 0$,代入式(6),即可得到碰撞振动系统的 Poincaré 映射的不动点的坐标.

Poincaré 映射可以分为两个阶段:连续两次碰撞之间的阶段 P_I 和瞬时碰撞过程 P_{II}

$$P_I : (x_{1+}(0), x_2(0), \dot{x}_{2+}(0), \tau(0)) \mapsto (\dot{x}_{1-}(t_1), x_2(t_1), \dot{x}_{2-}(t_1), \tau(t_1)) \quad (7a)$$

$$P_{II} : (x_{1-}(t_1), x_2(t_1), x_{2-}(t_1), \tau(t_1)) \mapsto (x_{1+}(t_1), x_2(t_1), x_{2+}(t_1), \tau(t_1)) \quad (7b)$$

那么,从两振子在第一次碰撞后的瞬时到第二次碰撞后的瞬时,这个过程 Poincaré 映射可以表示如下

$$P = P_{II} \circ P_I : (x^{1+}(0), x_2(0), x_{2+}(0), \tau(0)) \mapsto (x_{1+}(t_1), x_2(t_1), x_{2+}(t_1), \tau(t_1)) \quad (8)$$

式中 t_1 为两次碰撞间的时间间隔.

对于瞬时碰撞过程,由碰撞前后的瞬时速度关系,可以得到

$$DP_{II} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

对于两次碰撞之间的过程, Poincaré 映射在不动点处的线性化矩阵可按下式计算

$$DP_I(x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0) = \left[\frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right]_{(x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0)}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

式中 $P_i(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 是 $P_I(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 的第 i 个分量;而 (X_1, X_2, X_3, X_4) 代表坐标变量 $(x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0)$ (为避免繁杂起见,以下它表示 Poincaré 截面上的任一点,并非特指不动点).

首先把积分常数 A_1, A_2, A_3, A_4 表示为依赖于初值 $(x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0)$ 的表达式;然后由式(5),可以建立以下映射关系

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= P_1(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0) \\ \dot{x}_2 &= P_2(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0) \\ \dot{x}_2 &= P_3(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0) \\ \dot{\tau} &= P_4(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0) = \omega t_1 + \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由式(3),可以建立坐标变量 $t_1, x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0$ 之间的函数关系

$$G(t_1, x_{10}, x_{20}, x_{20}, \tau_0) = e^{-\eta_1} (A_3 \cos(\omega_{d2} t_1) + A_4 \sin(\omega_{d2} t_1)) + B_3 \sin(\omega t_1 + \tau_0) + B_4 \cos(\omega t_1 + \tau_0) - e^{-\xi_1} (A_1 \cos(\omega_{d1} t_1) + A_2 \sin(\omega_{d1} t_1) - B_1 \sin(\omega t_1 + \tau) - B_2 \cos(\omega t_1 + \tau) + g = 0 \quad (12)$$

若设 DP_I 矩阵中的各元素如下

$$DP_I = \begin{bmatrix} a_{11p} & a_{12p} & a_{13p} & a_{14p} \\ a_{21p} & a_{22p} & a_{23p} & a_{24p} \\ a_{31p} & a_{32p} & a_{33p} & a_{34p} \\ a_{41p} & a_{42p} & a_{43p} & a_{44p} \end{bmatrix} \quad (13)$$

由式(11),根据复合函数求导法则,并对式(12)利用隐函数定理,可以求得矩阵 DP_I 中的各元素.

由式(7) ~ 式(9)和(13),有

$$DP = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11p} & a_{12p} & a_{13p} & a_{14p} \\ a_{21p} & a_{22p} & a_{23p} & a_{24p} \\ a_{31p} & a_{32p} & a_{33p} & a_{34p} \\ a_{41p} & a_{42p} & a_{43p} & a_{44p} \end{bmatrix} \quad (14)$$

碰撞振动系统的 Poincaré 映射的线性化矩阵 DP 在不动点处的特征值决定了相应的周期运动的稳定性.如果线性化矩阵 DP 的所有特征值都位于单位圆内,那么相应的周期运动是稳定的.当线性化矩阵 DP 的具有最大的模的特征值位于单位圆上时,根据这些特征值的数量不同以及它们在单位圆上的位置不同,将会发生不同的分岔现象,从而导致系统的动力学行为的质的变化.例如:当一对共轭复特征值以非零速率穿越单位圆,而其它特征值严格地位于单位圆内时,将会发生 Hopf 分岔;当一对共轭复特征值以及一个 -1 的实特征值同时以非零速率穿越单位圆,而另一个特征值严格地位于单位圆内时,将会发生 Hopf-flip 分岔^[8].

4 数值模拟

4.1 Poincaré 映射投影图

以理论上的不动点加上一个微小扰动为初始迭代点,迭代 10000 次,可以得到碰撞振动系统的 Poincaré 映射投影图.

首先取一组参数: $u_m = 2.0, u_c = 1.0, u_k = 1.0, \zeta = 0.0001, f_2 = 0.9, r = 0.8, g = 0.0, n = 1$. 当 $\omega = 1.5951$ 时,线性化矩阵的特征值如下

$$\lambda_{1,2} = 0.6817 \pm 0.4440i, \quad \lambda_3 = -0.9652, \lambda_4 = -1.0000$$

此时线性化矩阵有一个特征值为 -1 , 而其它三个特征值严格地在单位圆内,碰撞振动系统将会发生周期倍化分岔.例如当 $\omega = 1.5500$ 时,稳定的周期运动在 Poincaré 截面投影图上表现为一个稳定的不动点,如图 2(a) 所示; $\omega = 1.5960$ 时,碰撞振动系统的 1-1 周期运动失稳,分岔出稳定的周期 2-2 运动,如图 2(b) 所示.当 $\omega = 1.5961$ 时,在两个周期 2-2 点将会分别分岔出两个 Hopf 圈,如图 2(c) 所示;图 2(d) 是图 2(c) 的局部放大,以便清晰地观

察到 Hopf 圈. 当 ω 进一步增加时, 系统将会通向混沌运动, 如图 2(e), (f) 所示.

当 ω 继续增加时, 碰撞振动系统又将获得稳定的周期运动. 当 $\omega = 2.0710$ 时, 线性化矩阵的特征值如下

$$\lambda_{1,2} = 0.2619 \pm 0.4441i,$$

$$\lambda_{3,4} = -0.6930 \pm 0.7209i;$$

$$|\lambda_{1,2}| = 0.6394, |\lambda_{3,4}| = 1.0000$$

此时线性化矩阵有一对共轭复根穿越单位圆, 而其它一对共轭复根停留在单位圆内, 碰撞振动系统将会发生 Hopf 分岔. 例如当 $\omega = 2.0780$ 时, 在 Poincaré 截面上获得吸引的 Hopf 圈, 如图 3(a) 所示. 当 ω 进一步增加, 如当 $\omega = 2.0828$ 时, 在 Poincaré 截面上的不变圈在圈内是吸引的, 而在圈外则是排斥的, 如图 3(b) 所示, 为一个半稳定的 Hopf 圈. 当 ω 继续增加, 碰撞振动系统将会从 Hopf 分岔通向混沌运动, 如图 3(c) 所示.

取另外一组参数如下: $u_m = 2.0, u_c = 2.5, u_k = 1.5, \zeta = 0.0001, f_2 = 0.9, r = 0.8, g = 0.0005, n = 1$. 当 $\omega = 2.275$ 时, 线性化矩阵的特征值如下

$$\lambda_{1,2} = 0.1878 \pm 0.7771i,$$

$$\lambda_{3,4} = -0.7958 \pm 0.6054i;$$

$$|\lambda_{1,2}| = 0.6329, |\lambda_{3,4}| = 1.0000$$

此时碰撞振动系统将会获得稳定的拟周期响应. 例如当 $\omega = 2.2920$ 时, 在 Poincaré 截面上获得吸引的 Hopf 圈, 如图 4(a) 所示. 当 ω 继续增加时, 碰撞振动系统将会从环面倍化通向混沌运动. 如图 4(b), (c) 所示.

4.2 分岔图

取 ω 为可变参数, 在第一组参数的情况下: $u_m = 2.0, u_c = 1.0, u_k = 1.0, \zeta = 0.0001, f_2 = 0.9, r = 0.8, g = 0.0, n = 1$. 在 $\omega = 1.5951$ 附近的分岔图如图 5(a) 所示: 由于随着 ω 的增加, 只经过一次倍化分岔后, 马上在两个周期 2-2 点处出现 Hopf 分岔, 所以图中显示的基本上是 Hopf 分岔的情况, 而几乎不能观察到周期倍化分岔的情况; 而当 ω 在接近于 1.66 时, 从图中显而易见又将得到稳定的周期运动; 当 ω 继续增加, 在 $\omega = 2.0710$ 附近的分岔图如图 5(b) 所示.

在第二组参数的情况下: $u_m = 2.0, u_c = 2.5, u_k = 1.5, \zeta = 0.0001, f_2 = 0.9, r = 0.8, g = 0.0005, n = 1$, 在 $\omega = 2.2750$ 附近的分岔图如图 5(c) 所示.

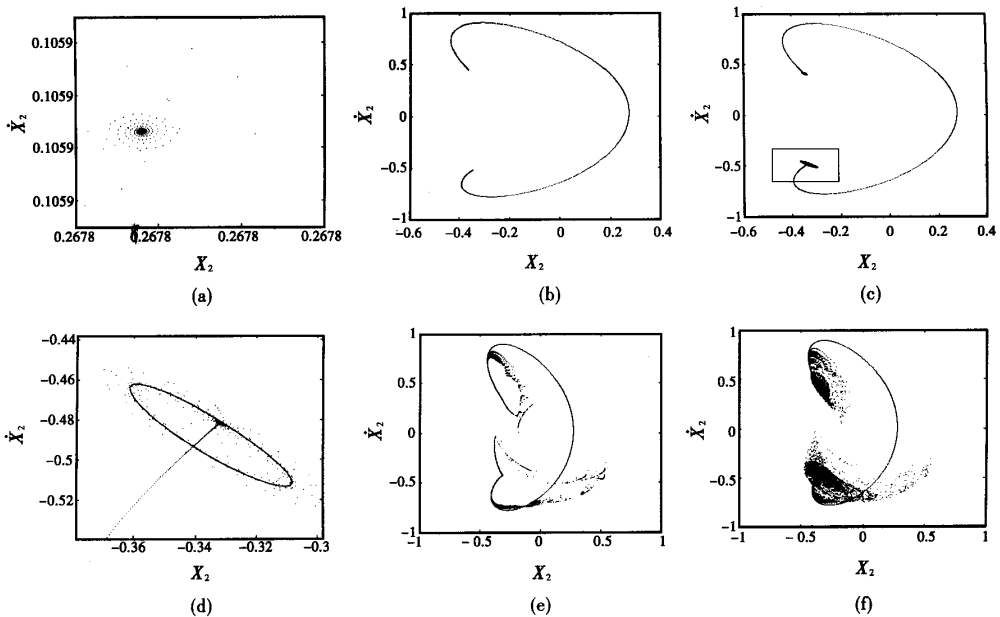


图2 Poincaré 截面投影图: 从周期倍化分岔通向混沌.

(a) $\omega = 1.5500$ (b) $\omega = 1.5960$ (c) $\omega = 1.5961$ (d) $\omega = 1.5961$ (e) $\omega = 1.5963$ (f) $\omega = 1.5964$.

Fig. 2 The projected Poincaré maps; the route of period-doubling bifurcation to chaos.

(a) $\omega = 1.5500$ (b) $\omega = 1.5960$ (c) $\omega = 1.5961$ (d) $\omega = 1.5961$ (e) $\omega = 1.5963$ (f) $\omega = 1.5964$.

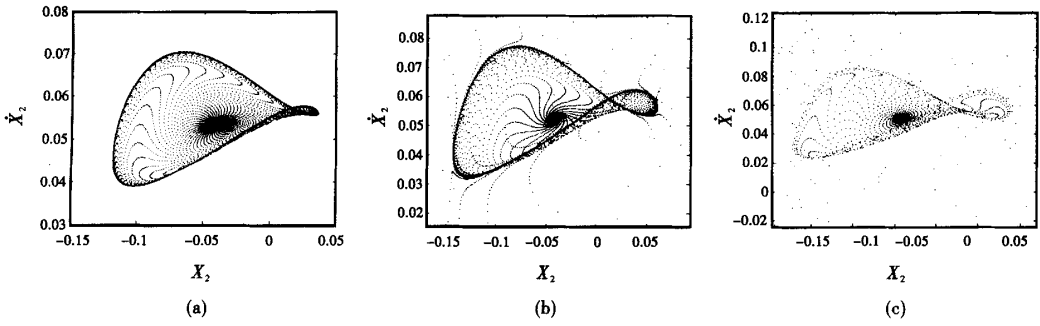


图3 Poincaré 截面投影图:从 Hopf 分岔通向混沌.
 (a) $\omega = 2.078\ 0$ (b) $\omega = 2.082\ 8$ (c) $\omega = 2.090\ 5$.
 Fig. 3 The projected Poincaré maps: the route of Hopf bifurcation to chaos.
 (a) $\omega = 2.078\ 0$ (b) $\omega = 2.082\ 8$ (c) $\omega = 2.090\ 5$.

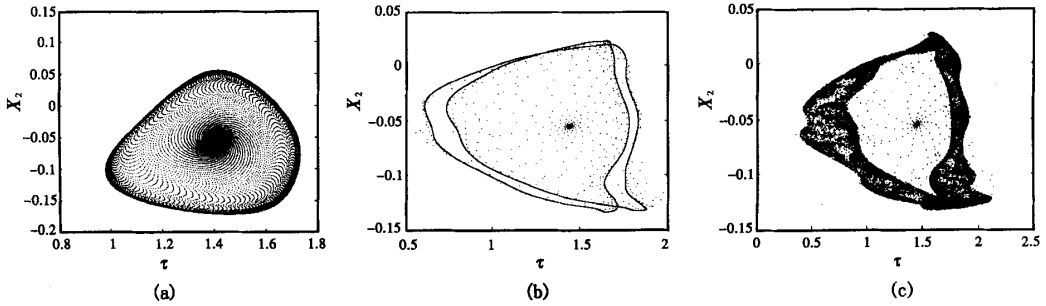


图4 Poincaré 截面投影图:从拟周期运动通向混沌.
 (a) $\omega = 2.292\ 0$ (b) $\omega = 2.400\ 0$ (c) $\omega = 2.408\ 0$.
 Fig. 4 The projected Poincaré maps: the route of quasi - periodic motion to chaos.
 (a) $\omega = 2.292\ 0$ (b) $\omega = 2.400\ 0$ (c) $\omega = 2.408\ 0$.

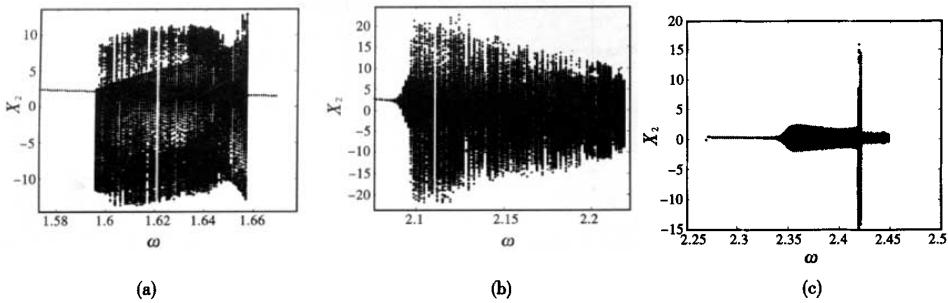


图5 分岔图
 Fig. 5 Bifurcation diagrams

5 结束语

通过分析两自由度对碰振动系统的单碰周期 n 运动及其四维 Poincaré 映射,考虑了线性化矩阵在不动点处的特征值的以下两种情况:1)有一个 -1 的特征根位于单位圆上,其它三个特征根位于单

位圆内;2)有一对共轭复特征值位于单位圆上,另外一对共轭复特征值位于单位圆内.通过数值模拟得到了以上两种情况的 Poincaré 截面投影图.而对于线性化矩阵在不动点处同时有一个 -1 的特征值以及一对共轭复特征值位于单位圆上,另外一个特征值位于单位圆内的情况,如何有效地确定系统

参数的问题,需要作进一步的研究.

参 考 文 献

- 1 Natsiavas S. Dynamics of multiple-degree-of-freedom oscillators with colliding components. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 165:439~453
- 2 Ivanov AP. Impact oscillations: linear theory of stability and bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 178:361~378
- 3 谢建华. 一类碰撞振动系统的余维二分叉和 Hopf 分叉. *应用数学和力学*, 1996, 17(1): 63~72 (Xie Jianhua. Codimension two bifurcations and Hopf bifurcations of an impacting vibrating system. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, 17(1):63~72(in Chinese))
- 4 Luo GW, Xie JH. Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(3):391~408
- 5 丁旺才, 谢建华. 碰撞振动系统的一类余维二分岔及 T^2 环面分岔. *力学学报*, 2003, 35(4): 503~508 (Ding Wangcai, Xie Jianhua. Codimension-2 bifurcation and T^2 torus bifurcation of a three-degree-of-freedom vibro-impact system. *Acta Mech Sinica*, 2003, 35(4):503~508(in Chinese))
- 6 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰振系统运动分析. *力学学报*, 2001, 33(6):776~786 (Li Qunhong, Lu Qishao. Analysis to motions of a two-degree-of-freedom system. *Acta Mech Sinica*, 2001, 33(6):776~786(in Chinese))
- 7 张彦梅, 陆启韶, 李群宏. 一类双自由度碰振系统的亚谐波周期运动存在性. *动力学与控制学报*, 2003, 1(1):29~34 (Zhang YM, Lu QS, Li QH. The existence of subharmonic periodic motion in a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of dynamics and control*, 2003, 1(1):29~34(in Chinese))
- 8 Ding WC, Xie JH, Sun QG. Iteration of Hopf and period doubling bifurcations of a vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275:27~45

HOPF BIFURCATION AND CHAOS OF A TWO-DEGREE-OF-FREEDOM VIBRO-IMPACT SYSTEM*

Le yuan¹ Xie Jianhua¹ Ding Wangcai^{1,2}

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract The periodic motion and the Poincaré maps of a two-degree-of-freedom vibro-impact system were studied, and the stability of the periodic motion was determined by the eigenvalues of the Jacobian matrix. The analysis showed that there existed Hopf bifurcations and period-doubling bifurcations in the vibro-impact system under suitable system parameters. The quasi-periodic responses of the system represented by invariant circles in the projected Poincaré section were obtained by numerical simulations, and the routes to chaos were described.

Key words vibro-impact, periodic motion, Poincaré map, Hopf bifurcation, chaos

Received 09 May 2004, revised 04 August 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10072051) and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China(20010613001)