

双摆与单侧刚性约束面之间的斜碰撞振动

韩维^{1,2} 胡海岩¹ 金栋平¹ 侯志强²

(1. 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016) (2. 海军航空工程学院机械工程系, 烟台 264001)

摘要 研究了简谐力矩激励作用下的平面双摆与单侧刚性约束面之间的斜碰撞振动, 讨论并推导了系统在斜碰撞前后的状态关系, 并用数值方法研究了激励参数和系统物理参数的变化对系统稳态行为的影响, 揭示了斜碰撞振动系统的运动复杂性.

关键词 双摆, 斜碰撞振动, 稳态运动, 分叉

作为强非线性问题的一种典型情况, 碰撞振动问题长期以来受到力学界的充分重视^[1~4], 并发展了相关的理论分析、数值计算和实验方法^[5]. 在碰撞振动问题的研究中, 斜碰撞振动由于在接触点不但具有相对法向速度, 而且还有相对切向速度; 从而其处理方法和一般的碰撞问题有所区别. 对于斜碰撞而言, 如果考虑相对切向速度引起的摩擦, 则碰撞面切向将存在单向滑动至碰撞结束、滑动逆向、粘滞滑动等多种运动现象, 其处理非常复杂, 一般无法建立解析形式的碰撞前后状态关系, 文献^[6]为此发展了一种迭次施加微小冲量的数值算法, 该算法可以应用于切向摩擦力模型给定的斜碰撞情况. 但即使不考虑摩擦, 切向运动也可能存在多种情况, 碰撞前后的状态关系也比正碰撞要复杂得多.

为说明这种复杂情况, 本文将研究一个受到简谐力矩激励的双摆与单侧刚性约束面之间的斜碰撞振动. 组成双摆的两杆不但具有转动, 其各自的转动中心也具有由外加激励所引起的附加运动. 此时, 在不同的运动状态下, 将具有不同的碰撞角度, 从而引起系统在碰撞前后的状态关系随碰撞角度的不同而改变. 在非碰撞运动期间, 双摆是一个两自由度非线性系统, 但在碰撞时仍然属于运动物体与固定平面之间的斜碰撞, 所以采取文献^[7]中的方法来求取系统在碰撞前后的状态关系.

1 双摆斜碰撞振动模型及其自由运动方程

由两根均质杆铰接成的水平面内的双摆如图1所示, 两杆的质量分别为 m_1 和 m_2 , 长度分别为 l_1 和 l_2 , 杆1左端与支座 O 铰接, 两杆之间的铰接点为 A . 在 O 和 A 处设有线性扭矩弹簧并存在铰阻尼, 弹簧扭转刚度和铰的粘性阻尼系数分别为 k_1, k_2 和

c_1, c_2 . 双摆的平衡位置在图示的水平位置. 在支座 O 处, 杆1受到 $M_0 \cos \Omega t$ 的简谐力矩激励作用, 限制 M_0 的大小使 A, B 两端点在运动中不致沿顺时针方向穿越负 y 轴. 限制双摆运动的刚性约束平面与双摆静平衡位置(图示 y 轴)相距为 H .

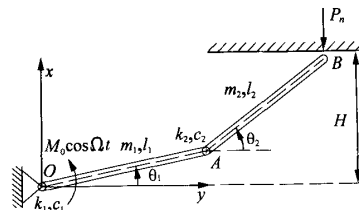


图1 双摆与单侧刚性约束面之间的斜碰撞振动
Fig. 1 The oblique-impact vibration of a double compound pendulum with the end displacement limit

取杆1和杆2的转角 θ_1 和 θ_2 为系统的广义坐标, 令 $\omega_1 = \sqrt{3k_1/(m_1 l_1^2)}$, $\omega_2 = \sqrt{3k_2/(m_2 l_2^2)}$, $2\zeta_1 \omega_1 = 3c_1/(m_1 l_1^2)$, $2\zeta_2 \omega_2 = 3c_2/(m_2 l_2^2)$, 并引入无量纲变量 $\tau = \omega_2 t$, $m = m_1/m_2$, $l = l_1/l_2$, $\omega_0 = \omega_1/\omega_2$, $M = 3M_0/(m_2 l_2^2 \omega_2^2)$, $\omega = \Omega/\omega_2$ 和 $h = H/l_2$, 由 Lagrange 方法, 求得系统在非碰撞期间的无量纲运动微分方程为

$$\begin{cases} (ml^2 + 3)\ddot{\theta}_1 + 3l \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2/2 + \\ 3l \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2/2 + 2(ml^2 \zeta_1 \omega_0 + \zeta_2)\dot{\theta}_1 - \\ 2\zeta_2 \dot{\theta}_2 + (ml^2 \omega_0^2 + 1)\theta_1 - \theta_2 = M \cos \omega \tau \\ 3l \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1/2 + \ddot{\theta}_2 - 3l \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2/2 - \\ 2\zeta_2 \dot{\theta}_1 + 2\zeta_2 \dot{\theta}_2 - \theta_1 + \theta_2 = 0 \end{cases}$$

当 $l \sin \theta_1 + \sin \theta_2 < h$ 时 (1)

式中的点号表示对无量纲时间 τ 求导.

2 双摆与约束面之间的斜碰撞状态关系

为说明斜碰撞前后系统状态关系的复杂性,本节将采用 Lagrange 方程求取多刚体的碰撞方程. 瞬时碰撞问题的 Lagrange 方程表述为^[8]

$$\Delta(\partial T/\partial \dot{q}_i) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

式中 \dot{q}_i 为对应碰撞系统广义坐标 q_i 的广义速度, N 为独立广义坐标数, T 为碰撞时的系统动能, P_i 为对应广义坐标 q_i 的广义冲量, $\Delta(\cdot)$ 表示括号内的量在碰撞前后时刻之间的变化. 通常的 Lagrange 方程中还含有势能项和其它的广义力项,但在刚体瞬间碰撞理论的基本假设下,系统坐标在碰撞前后不变,所以势能项的微分为零,而所有其它有限力在碰撞中的冲量均忽略不计.

根据文献[7]计算碰撞前后状态关系的思想,将碰撞过程区分为压缩阶段和恢复阶段,并令 $\dot{\theta}_1^-$ 和 $\dot{\theta}_2^-$, $\dot{\theta}_{10}$ 和 $\dot{\theta}_{20}$, $\dot{\theta}_1^+$ 和 $\dot{\theta}_2^+$ 分别为碰撞开始时刻、压缩阶段结束时刻以及碰撞过程结束时刻杆 1 和杆 2 的角速度. 按图 1 所示的坐标系,碰撞过程中 B 端和 A 处的法向和切向速度由下面的公式确定

$$\dot{x}_B = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (3a)$$

$$\dot{y}_B = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (3b)$$

$$\dot{x}_A = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \dot{y}_A = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (4)$$

这样,在压缩阶段结束时,由于 $\dot{x}_B = 0$,从而

$$\dot{\theta}_{20} = -l_1 \dot{\theta}_{10} \cos \theta_1 / (l_2 \cos \theta_2) \quad (5)$$

以及此时碰撞点的切向速度

$$\dot{y}_{B0} = -l_1 \dot{\theta}_{10} (\sin \theta_1 - \cos \theta_1 \tan \theta_2) \quad (6)$$

由于 $\dot{\theta}_1^-$ 和 $\dot{\theta}_2^-$ 可能具有不同的大小组合,其方向可能相同也可能不同,所以从(5)和(6)两式无法判断 $\dot{\theta}_2$ 是否会在压缩过程中逆向. 由文献[9]中解释的理由,我们甚至不能按预先假定 $\dot{\theta}_2$ 在碰撞中逆向并以此区分碰撞阶段的方法来建立方程. 数值仿真结果说明,不考虑切向摩擦时, $\dot{\theta}_2$ 在碰撞过程中存在切向运动不逆向、在法向压缩或恢复阶段逆向的多种情况,这取决于 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 相对运动关系.

而切向滑动速度 \dot{y}_B 的逆向时刻更为复杂,可能在 $\dot{\theta}_2$ 压缩阶段或恢复阶段,在 $\dot{\theta}_2$ 逆向之前或之后,甚至可能单向滑动直至碰撞结束,而这种单向滑动也具有两种可能的方向. 这样就有多种可能的

组合,而且每种组合还与 $\dot{\theta}_1$ 是否逆向和何时逆向有关. 因此,如果考虑碰撞过程中杆端与约束面之间的摩擦,尽管法向冲量方向是始终不变的,但切向冲量依 \dot{y}_B 的方向而改变,因此必须依据碰撞前的状态判断哪一种情况将在碰撞过程中出现,才能得到正确的碰撞方程. 而这种判断是非常困难的.

基于上述原因,本文假设碰撞面是光滑的,这样碰撞过程中只需考虑方向始终不变的法向冲量,而不需要考虑切向冲量对碰撞过程的影响. 这样将大大简化分析的难度. 如果需要研究碰撞面切向摩擦对系统稳态运动特性的影响,可以采用文献[6]提出的冲量步进算法来处理,此算法不需要预先判定 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 是否逆向和何时逆向;我们将在后续工作中进行此项研究. 冲量步进算法在处理碰撞面光滑情形时,其结果和用 Lagrange 方法得到的解析结果完全一致^[6].

令 P_n 为整个碰撞过程中系统受到的法向冲量, P_n^I 和 P_n^{II} 分别为压缩过程和恢复过程中的冲量,则 $P_n = P_n^I + P_n^{II}$. 忽略任何有限力的影响,系统因碰撞受到的对应广义坐标 θ_i 的广义冲量为

$$P_1 = -P_n l_1 \cos \theta_1, P_2 = -P_n l_2 \cos \theta_2 \quad (7)$$

分别用 P_n^I 和 P_n^{II} 代替上式中的 P_n 即得压缩和恢复过程中的广义冲量.

碰撞过程中系统动能为

$$T = (m_1 l_1^2/3 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}_1^2/2 + (m_2 l_2^2/12 + m_2 l_2^2/4) \dot{\theta}_2^2/2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2/2 \quad (8)$$

将式(7)和式(8)代入式(2),得 Lagrange 方程在压缩和恢复过程的具体形式分别为

$$\begin{cases} a_1(\dot{\theta}_{10} - \dot{\theta}_1^-) + a_2(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_2^-) = -P_n^I l_1 \cos \theta_1 \\ a_2(\dot{\theta}_{10} - \dot{\theta}_1^-) + a_3(\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_2^-) = -P_n^I l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} a_1(\dot{\theta}_1^+ - \dot{\theta}_{10}) + a_2(\dot{\theta}_2^+ - \dot{\theta}_{20}) = -P_n^{II} l_1 \cos \theta_1 \\ a_2(\dot{\theta}_1^+ - \dot{\theta}_{10}) + a_3(\dot{\theta}_2^+ - \dot{\theta}_{20}) = -P_n^{II} l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (10)$$

式中 $a_1 = m_1 l_1^2/3 + m_2 l_2^2$, $a_2 = m_1 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)/2$, $a_3 = m_2 l_2^2/3$.

由于在碰撞过程中法向与切向变形在多数情

况下不会同步,所以采用 Poisson 方法来定义碰撞恢复系数.令 $r(0 < r \leq 1)$ 为 Poisson 恢复系数,则有

$$r = P_n^{\parallel} / P_n^{\perp} \quad (11)$$

解由式(5),式(9),式(10)和式(11)等式组成的方程组,并利用前文引入的无量纲参数将结果无量纲化,得碰撞后两杆的角速分别为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1^+ &= (r_1 \dot{\theta}_1^- + r_2 \dot{\theta}_2^-) / B, \dot{\theta}_2^+ = \\ &(r_3 \dot{\theta}_1^- + r_4 \dot{\theta}_2^-) / B \end{aligned} \quad (12)$$

此式应用于斜碰撞发生时,即当 $l \sin \theta_1 + \sin \theta_2 = h$ 成立时.式中各系数分别为

$$\begin{aligned} r_1 &= (ml^2/3 + 1) \cos^2 \theta_2 - rl^2 \cos^2 \theta_1 / 3 + \\ &(r-1)l^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) / 2 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} r_2 &= l(r+1) \cos \theta_2 [\cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \\ &\theta_2) / 2 - \cos \theta_1 / 3] \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} r_3 &= l(r+1) \cos \theta_1 [l^2 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \\ &\theta_2) / 2 - (ml^2/3 + 1) \cos \theta_2] \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} r_4 &= l^2 \cos^2 \theta_1 / 3 - r(ml^2/3 + 1) \cos^2 \theta_2 + \\ &(r-1)l^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) / 2 \end{aligned} \quad (13d)$$

$$\begin{aligned} B &= l^2 \cos^2 \theta_1 / 3 + (ml^2/3 + 1) \cos^2 \theta_2 - \\ &l^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (14)$$

式(12)说明,无摩擦的时候,斜碰撞前后状态关系仍然与碰撞角度有关.其原因在于,如果将参与碰撞接触的杆2看作单自由度碰撞系统,那么该系统同时具有平动和转动两种基础运动.正是这种运动复杂性导致了碰撞关系的复杂性.

根据上面的结果,支座位置受到简谐扭距激励的平面双摆在单侧刚性约束时的运动由(1)和(12)两式组成的动力学方程组决定.在推导上述方程组的过程中,并没有对运动幅度 θ_1 和 θ_2 的大小引入任何限制,所以该方程组可适应于系统任何幅度的运动,包括大范围运动.

3 数值仿真结果

定义 Poincaré 截面为

$$\Sigma = \{(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \tau) \mid l \sin \theta_1 +$$

$$\sin \theta_2 = h, \tau = \tau^-\} \quad (15)$$

式中 τ^- 表示碰撞开始的瞬间时刻, Poincaré 截面上的点代表系统在碰撞开始瞬间的状态.所有参数及仿真结果均取为无量纲数.当激励参数或系统物理参数改变时,系统稳态运动特征的变化可以用 Poincaré 截面上点的坐标变化来表示.除时间 τ 外, $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$ 中任何一个坐标的变化趋势均可以独立代表系统稳态运动特征的变化趋势.因此,下面的分析均针对 θ_2 , 即杆2与约束面碰撞时的运动角度进行.

在数值仿真时,给定系统参数均为 $m = 1, l = 1, r = 0.8$ 和 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$, 仿真初始条件均为 $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2 = (0, 0, 0, 0.5))$. 以下给出一些主要的仿真结果.

3.1 激励参数对系统稳态斜碰撞振动的影响

为考察简谐力矩激励参数变化对系统稳态斜碰撞振动的影响,固定系统物理参数为 $\omega_0 = 1$ 和 $h = 0.5$. 此时当改变激励幅值 M 的时候,杆2与约束面碰撞时的运动角度 θ_2 随 M 改变的变化趋势如图2所示.从图中可以看到一系列周期运动的分叉,以及概周期运动的分叉、锁相直至混沌等现象.在大范围的混沌运动内仍然存在许多狭窄的周期碰撞区间,例如在 $M = 3.235$ 附近的周期8碰撞振动和 $M = 3.42$ 处的周期3碰撞振动.

当激励频率变化时,系统稳态运动的变化趋势如图3所示.从图3(a)和(b)中发现,当 $M = 1.5$ 时,系统随 ω 增大以逆倍周期分叉进入区间 $\omega \in (0.66, 0.825)$ 中的周期1斜碰撞运动,而以倍周期分叉离开该区间;在 $\omega \in (1.488, 1.35)$ 之间随 ω 增大逆倍周期分叉反复进行.随 ω 的变化,系统运动方程的一些解支的稳定性发生变化,当稳定解支变为不稳定时,该解支在图中消失,于是产生一系列的跳跃现象.当 ω 取值比较大时,如果其值不在系统的谐振频率附近,杆2的振动频率将跟不上激励频率而使杆2的振动不能到达约束面,此时碰撞将不会发生.当 $M = 2.5$ 时,图3(c)和(d)中也有类似规律.

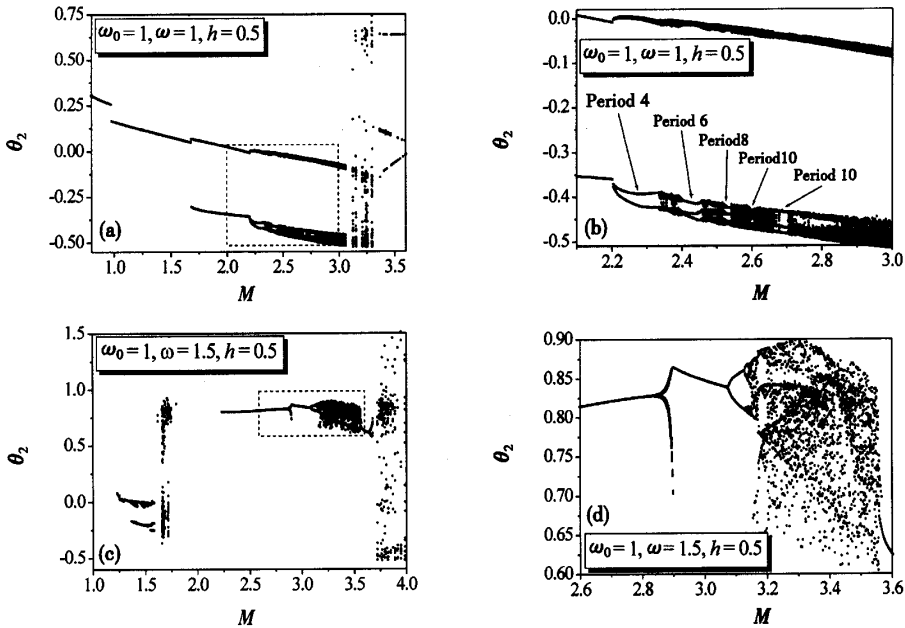


图2 激励幅值 M 变化时系统稳态斜碰撞振动特性(Poincaré 截面上的 Q_2) 的变化趋势

(图(b)和(d)分别为图(a)和(c)中虚框部分的局部放大)

Fig.2 The transitional dynamics of the steady-state motions with the variation of the excitation amplitude M ;

Fig (b) and (d) are the zoom in of the partial in Fig (a) and (c), respectively.

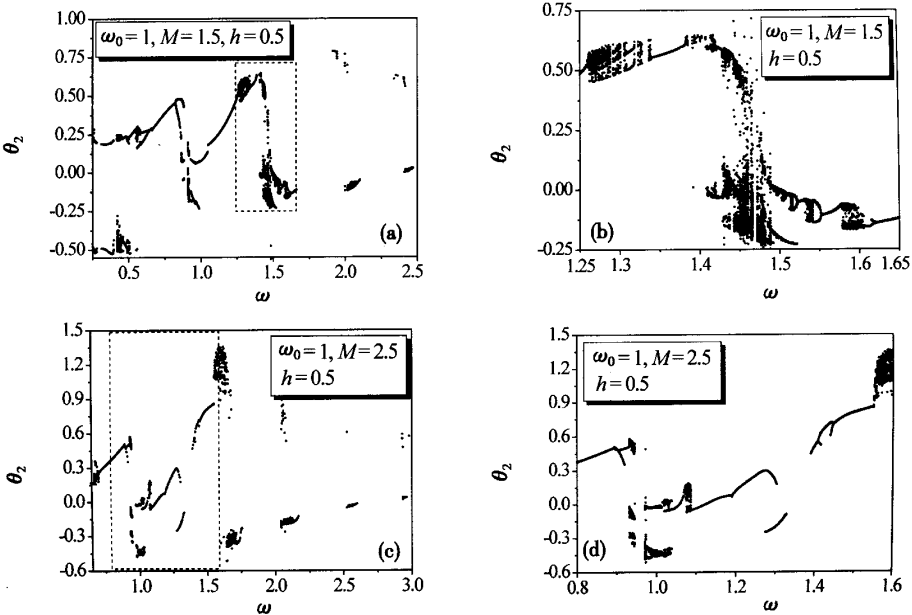


图3 激励频率 ω 变化时系统稳态斜碰撞振动特性(Poincaré 截面上的 θ_2) 的变化趋势

(图(b)和(d)分别为图(a)和(c)中虚框部分的局部放大)

Fig.3 The transitional dynamics of the steady-state motions with the variation of the excitation frequency ω ;

Fig (b) and (d) are the zoom in of the partial in Fig(a) and (c), respectively.

3.2 物理参数对稳态斜碰撞振动的影响

系统物理参数 m, l 和 k 的变化将直接导致自然频率比 ω_0 的变化, 所以以 ω_0 作为物理参数的代表. 另外将系统平衡位置到约束平面的无量纲距离 h 也作为物理参数之一加以考虑. 取 $h = 0.5$, 选取不同的激励参数, 系统稳态运动特征随 ω_0 的变化如图 4(a~d) 所示. 图示表明, 当激励幅值和频率都比较小时, 在 ω_0 取值的大部分范围内, 特别是当

$\omega_0 > 1.36$ 时, 系统均具有稳定的周期 1 运动. 当激励频率不变而幅值增大时, 具有非周期运动的参数范围增大, 只有在更大的 ω_0 值以后系统才始终为稳定的周期 1 运动; 当激励幅值不变而频率增大时, 稳定的周期碰撞振动在小激励幅值下难以发生, 而在比较大的激励幅值下容易发生并且随 ω_0 的变化存在一系列的从混沌经历逆倍周期分叉或跳跃分叉到稳定的周期 1 斜碰撞运动的过程.

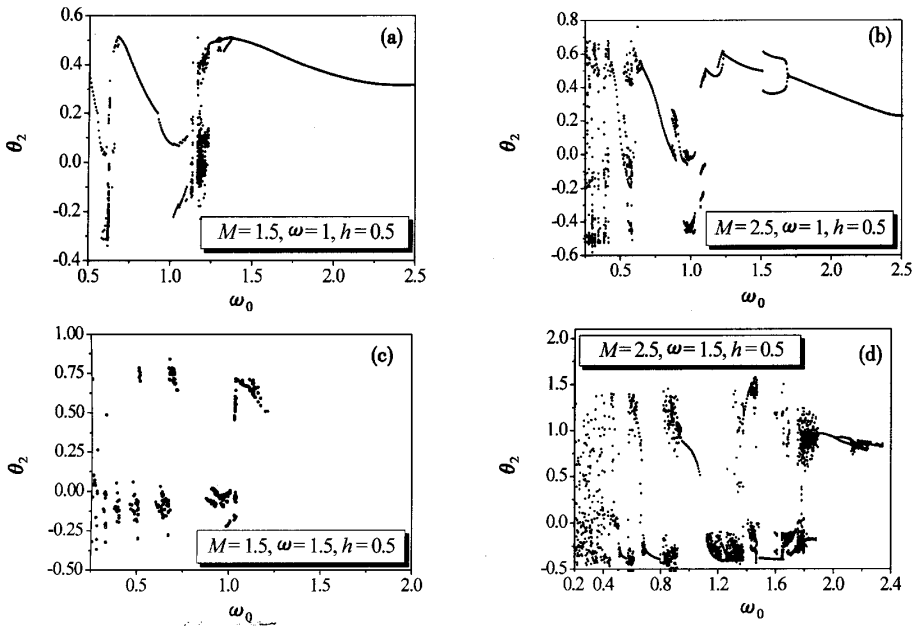
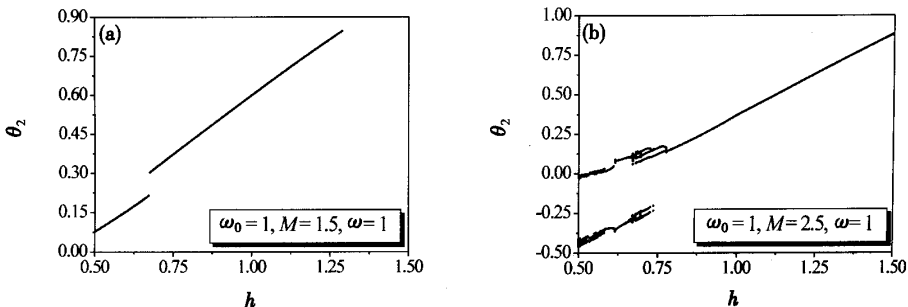


图 4 物理参数变化 ω_0 时系统稳态斜碰撞振动特性(Poincaré 截面上的 θ_2) 的变化趋势

Fig. 4 The transitional dynamics of the steady-state motions with the variation of the system parameter ω_0

不同的激励参数下系统稳态斜碰撞振动特征随 h 的变化情况如图 5(a~d) 所示. 当激励幅值较小时, 系统运动形式基本不受 h 变化的影响而一直保持为稳定的周期 1 斜碰撞运动, 只是随 h 的增大, 碰撞角度也随之增大, 直至 h 大到杆 2 在此激

励下不能到达约束面为止. 当激励幅值增大时, 能产生碰撞的 h 范围随之增大, 而在 h 较小时出现复杂的运动形式, 如周期 2 斜碰撞、混沌和“+1”分叉等. 其运动特征的变化随激励幅值的增大而越来越复杂.



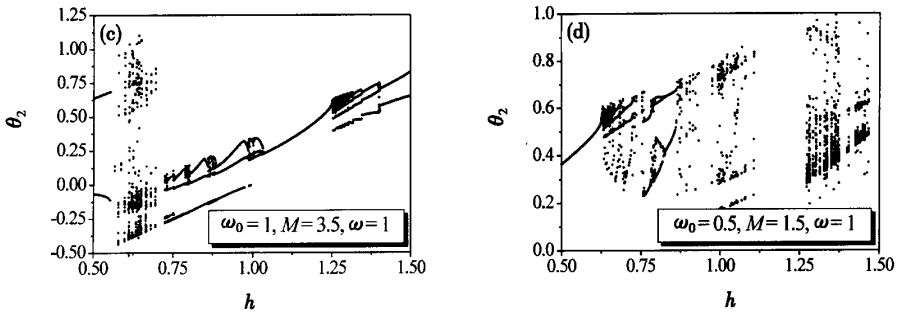


图5 系统平衡位置与约束面间距 h 变化时系统稳态斜碰撞振动特性(Poincaré 截面上的 θ_2) 的变化趋势
Fig. 5 The transitional dynamics of the steady-state motions with the variation of the distance h from the equilibrium position of the system to the limit

4 结论

本文研究了简谐力矩激励作用下的平面双摆与单侧刚性约束面之间的斜碰撞振动,讨论并推导了系统在斜碰撞前后的状态关系,并用数值方法研究了激励参数和系统物理参数的变化对系统稳态行为的影响.研究表明,系统动力学方程组的数值解随激励参数和系统物理参数的变化不断经历解支多少或解的稳定性的变化,使系统稳态运动发生诸如周期碰撞振动的分叉、跳跃、锁相和混沌等复杂的非线性现象.作为非线性力学系统的共同特征,这些现象是系统稳态行为随参数的变化而改变的必然结果.研究结果揭示了斜碰撞振动系统的运动复杂性.

参 考 文 献

- Shaw SW, Homes PJ. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, 90(1): 129~155
- Lenci S, Rega G. A procedure for reducing the chaotic response region in an impact mechanical system. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15(4): 391~409
- Han Wei, Hu Haiyan, Jin Dongping. Vibro-impacts of a slender cantilever beam with a lumped tip mass between two rigid stops. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2001, 18(2): 137~143
- Luo GW, Xie JH. Bifurcations and chaos in a system with impacts. *Physica D*, 2001, 148(3~4): 183~200
- 金栋平, 胡海岩. 碰撞振动及其典型现象. 力学进展, 1999, 29(2): 155~164 (Jin DP, Hu HY. Vibro-impacts and their typical behaviors of mechanical systems. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(2): 155~164 (in Chinese))
- 韩维, 胡海岩, 金栋平. 两自由度振动系统的斜碰撞分析. 力学学报, 2003, 35(6): 723~729 (Han W, Hu HY, Jin DP. Analysis of Oblique-impact of a Vibrating System of Two Degrees of Freedom. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(6): 723~729 (in Chinese))
- Stronge WJ. Rigid body collisions with friction. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1990, 431(1881): 169~181
- 黄昭度, 钟奉俄. 工程系统分析力学. 北京: 高等教育出版社, 1992 (Huang ZD, Zhong FE. *Analysis Mechanics for Engineering Systems*. Beijing: Higher Education Press, 1992 (in Chinese))
- 韩维. 斜碰撞振动系统动力学研究. [博士论文]. 南京: 南京航空航天大学, 2003: 80~82 (Han W. *Dynamics of the Oblique-impact Vibrating Systems*. [Ph D Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2003: 80~82 (in Chinese))

THE OBLIQUE-IMPACT VIBRATION OF A DOUBLE COMPOUND PENDULUM WITH THE END DISPLACEMENT LIMIT

Han Wei^{1,2} Hu Haiyan¹ Jin Dongping¹ Hou Zhiqiang²

(1. *Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 2100162, China*)

(2. *Department of Mechanical Engineering, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China*)

Abstract This paper studied the oblique-impact vibration of a double compound pendulum with the end displacement limit under harmonic moment excitation. The relations between the pre-impact state and the post-impact state were analyzed when the friction on the contact surface was not considered. The effect of the excitation parameters and the system parameters on the transitional dynamics of the system's steady-state motions were analyzed, and the rich nonlinear phenomena, such as the bifurcations of the periodic vibro-impact motions and the chaotic vibro-impact motions, were illustrated.

Key words double compound pendulum, oblique-impact vibration, steady states, bifurcation