

结构和气动非线性机翼颤振分析*

丁千 王冬立

(天津大学力学系, 天津 300072)

摘要 研究在超音速流中, 含有结构和气动立方非线性的二元机翼的颤振. 首先, 对线性化系统的零平衡点进行特征值分析, 表明系统颤振由 Hopf 分岔而产生; 然后应用规范形直接法, 推导出 Hopf 分岔解的规范形, 并结合数值模拟分析超、亚临界分岔情形的极限环特点; 最后分析了飞行马赫数和非线性刚度系数对分岔拓扑结构的影响, 表明具有“硬”弹簧性质的结构及增大悬挂点与质心的距离都有助于提高安全性, 而应避免“软”弹簧性质的结构.

关键词 结构和气动非线性, 颤振, Hopf 分岔, 规范形, 飞行马赫数

引言

机翼颤振是一种在达到一定飞行速度时容易产生的自激振动, 可能给飞机带来灾难性后果(例如解体). 国内外对此做了大量研究工作, 例如, 用等效线性化法研究机翼颤振的混沌问题并找出了混沌带^[1]; 用 KBM 法研究带外挂的机翼颤振问题^[2]; 用后继函数法研究分岔点类型^[3]; 用描述函数法研究机翼颤振的时、频域特点^[4,5]; 用胞映射法分析双线结构刚度机翼颤振的全局特点^[6], 等等. 以上研究主要考虑结构的非线性弹性力, 然而当飞行速度为超音速甚至高超音速时, 气动力的非线性特点会非常突出. 为此, Ashley^[7]提出了用于计算谐振翼面(高)超音速非定常压力分布的活塞理论, 可以推出作用于机翼的非线性气动升力和扭矩. 据此, Librescu 等采用李亚普诺夫函数法分析了含有立方型结构和气动非线性机翼的稳定性^[8]. 本文应用规范形方法研究高超音速情况下, 含有立方型结构和气动非线性机翼的颤振. 首先分析系统的平衡点和稳定性; 然后利用直接法^[9]求解得到 Hopf 分岔(颤振响应)的规范形; 最后分析了结构和气动参数对分岔拓扑结构的影响.

1 机翼运动方程和 Hopf 分岔点

机翼运动由上下沉浮 h 和俯仰角 α 描述, 其无量纲运动方程为^[8]

$$\begin{cases} \ddot{\zeta} + \chi_\alpha \ddot{\alpha} + 2\zeta_h(\bar{\omega}/V)\dot{\zeta} + (\bar{\omega}/V)^2\zeta = l_a \\ (\chi_\alpha/r_a^2)\ddot{\zeta} + \ddot{\alpha} + (2\zeta_h/V)\dot{\alpha} + \\ 1/V^2\alpha + 1/V^2Ba^3 = m_a \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\tau = U_\infty t/b$, $\zeta = h/b$. b 为翼宽, χ_α 为静不平衡量, r_a 为惯性距, ζ_h, ζ_h 为阻尼系数, $\bar{\omega}$ 为沉浮与俯仰固有频率比, B 为非线性刚度系数, V 为来流速度, l_a, m_a 为气动升力和力矩, 其无量纲表达式为(划线部分表示立方非线性项)

$$\begin{cases} l_a = -\frac{\lambda}{12vM} \{12\alpha + \underline{M^2(1+\gamma)\lambda^2\alpha^3} + \\ 12[\zeta + (1-x_0)\dot{\alpha}]\} \\ m_a = \frac{\lambda}{12vM} \frac{1}{r_a^2} \{12(1-x_0)\alpha + \\ \underline{M^2(1-x_0)(1+\gamma)\lambda^2\alpha^3} + \\ 4[3(1-x_0)\zeta + (4-6x_0+3x_0^2)\dot{\alpha}]\} \end{cases}$$

上式中 γ 为气体的等熵系数(空气取为 1.4), v 为单位翼展质量, λ 为气动修正系数, x_0 为弹性轴(悬挂点)与质心位置之比, M 为飞行马赫数. 化式(1)为一阶常微分方程组的形式

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad x = (\zeta, \alpha, \dot{\zeta}, \dot{\alpha})^T \quad (2)$$

$A, f(x)$ 分别是线性项系数矩阵和非线性项. 取系统参数为 $v = 100, \chi_\alpha = 0.25, \bar{\omega} = 1.2, r_a = 0.5, x_0 = 0.5, \lambda = 1, B = 50$. 为简便计, 忽略线性阻尼($\zeta_h = \zeta_h = 0$), 计算得 A 和 $f(x)$ 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -48/25V^2 & \frac{50M - V^2}{150V^2M} & -1/150M & 1/90M \\ 48/25V^2 & \frac{-V^2 - 100M}{75V^2M} & -1/75M & -11/450M \end{bmatrix}$$

2004-07-31 收到第 1 稿, 2004-08-30 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272078)

$$f(x) = \left[0 \quad 0 \quad -\frac{M}{750} + \frac{50}{3V^2} \quad -\frac{M}{375} - \frac{200}{3V^2} \right]^T x_3^3$$

显然(2)存在零解 $x = (0, 0, 0, 0)$, 即系统的零平衡点. A 在该平衡点处的特征方程为

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (3)$$

其中

$$a = \frac{7}{225M}, b = \frac{V^2 + 18300M^2 + 75V^2M}{5625V^2M^2}$$

$$c = \frac{109}{1875V^2M}, d = \frac{216V^2 + 10800M}{5625V^4M}$$

式(3)具有一对纯虚根时的速度为 Hopf 分岔点. 马赫数大于5时, 飞行已达高超音速^[8]. 计算 $M = 5$ 和 $M = 20$ 所对应的分岔点分别为 $V_1 = 15.770\ 836\ 2$ 和 $V_2 = 31.483\ 274\ 6$. 首先研究 $M = 5$ 的情况, 令 $V = V_1 + \mu$, 将(2)在 $\mu = 0$ 点进行泰勒展开至 μ 的一次项得

$$\dot{x} = A'(\mu)x + f'(x) \quad (4)$$

令 $\mu = 0$, A' 的特征根为 $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = 0.086\ 676\ 3i$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_4 = -0.691\ 367\ 3 + 0.626\ 628\ 4i$, $i = \sqrt{-1}$. 引入线性变换 $x = Pu$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, P 为与特征根相应的特征向量方阵, 将系统(4)化为

$$\dot{u} = Bu + \mu Cu + f(u) \quad (5)$$

其中 B, C 均为常数矩阵, $f(u)$ 是 u 的三次项函数. 将 μ 也看作状态变量, 将(5)写成参数形式

$$\begin{cases} \dot{\mu} \\ \dot{u} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{cases} \mu \\ u \end{cases} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ u \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ f(u) \end{cases} \quad (6)$$

2 规范型与极限环

根据文[9]提出得规范型直接法, 我们计算得到式(6)的近似到三阶的规范型为

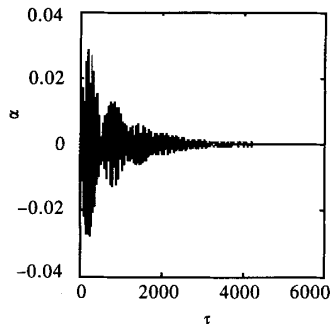
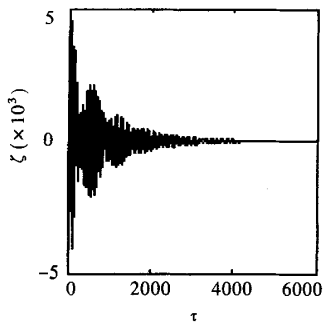
$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = 0.086\ 676\ 3v_2 + 0.005\ 181\ 2\mu v_2 + \\ \quad 0.001\ 503\ 5\mu v_2 + 0.009\ 892\ 3\mu^2 v_1 - \\ \quad 0.006\ 605\ 9\mu^2 v_2 - 156.071\ 9v_1^3 - \\ \quad 167.290\ 0v_1^2 v_2 - 156.071\ 9v_1 v_2^2 - \\ \quad 167.290\ 0v_2^3 \\ \frac{dv_2}{dt} = -0.086\ 676\ 3v_1 + 0.006\ 605\ 9\mu^2 v_1 + \\ \quad 167.290\ 0v_1^3 - 0.001\ 503\ 5\mu v_1 - \\ \quad 156.071\ 9v_2^3 + 167.290\ 0v_1 v_2^2 - \\ \quad 156.071\ 9v_1^2 v_2 + 0.009\ 892\ 3\mu^2 v_2 + \\ \quad 0.005\ 181\ 2\mu v_2 \end{cases} \quad (7)$$

令 $v_1 = r\cos\varphi, v_2 = r\sin\varphi$, 将式(7)转化为极坐标形式

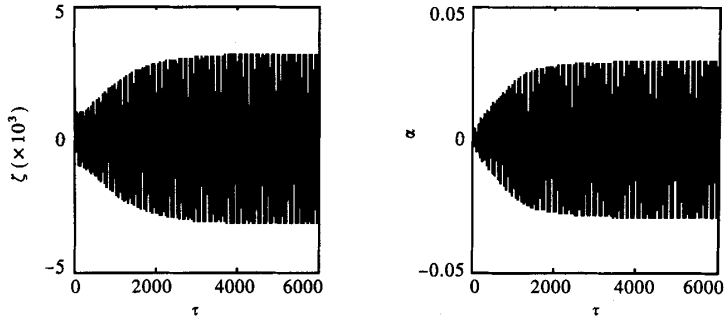
$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = a\mu r + br^3 + h.o.t \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega + cr^2 + d\mu + h.o.t \end{cases} \quad (8)$$

其中 $a = -156.0719$, $b = 0.0051812$, $c = 167.2900$, $d = -0.0015035$, $\omega = -0.0866763$. 由于 a, b 异号, 故原系统将产生超临界 Hopf 分岔. 即当 $V < V_1 = 15.770\ 836\ 2 (\mu < 0)$ 时, 系统的零解稳定; $V > V_1$ 时, 即使初值非常接近零解, 响应最终还是趋近一个幅值逐渐增大的极限环上. 数值模拟验证了理论分析结果, 见图1.

对于 $M = 20$ 的情形, 经推导, 同样得到式(7, 8)形式的分岔方程, 但系数为: $a = 39.508\ 5390$, $b = 0.000\ 9171$, $c = -126.271\ 4710$, $d = -0.001\ 0516$, $\omega = -0.043\ 4185$. 由于 a, b 同号, 可知原系统将产生亚临界 Hopf 分岔, 分岔前零解局部稳定, 分岔后零解不稳定.



(a) $V = 15.3, x_0 = (0.005, 0, 0, 0)$



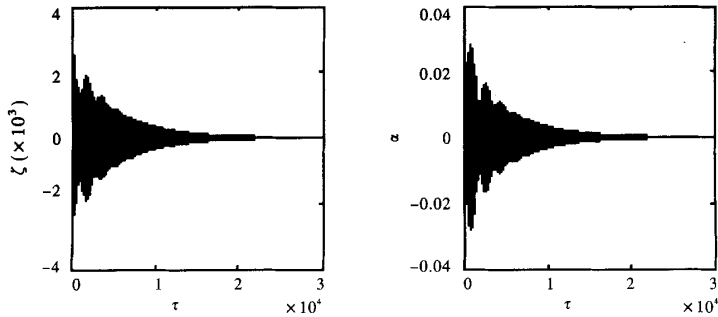
(b) $V = 16, x_0 = (0.001, 0, 0, 0)$

图1 超临界 Hopf 分岔前后的时间历程: (a) 分岔前; (b) 分岔后

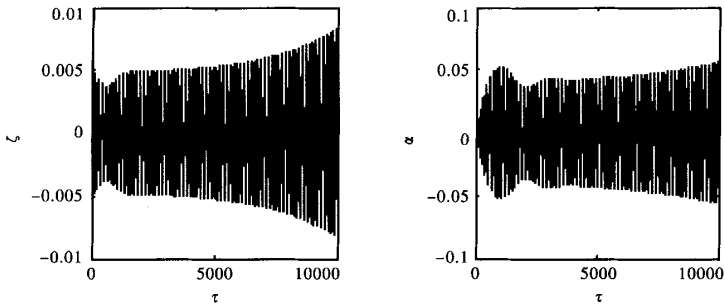
Fig 1 Time histories before and after supercritical Hopf bifurcation: (a) Before bifurcation; (b) after bifurcation

取 $V = 31 < V_2$ (但接近 V_2), 零解局部稳定并在其附近有一个不稳定极限环, 数值模拟得到该不稳定极限环的幅值 $A \approx 0.0035$. 因此当计算初值小于该值时零解稳定, 反之零解不稳定 (图 2(a,

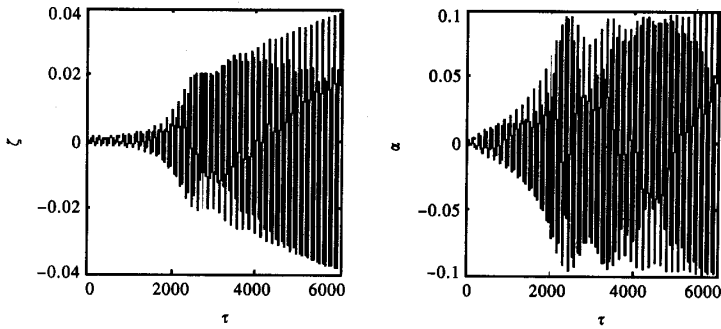
b)). 取 $V = 32 > V_2$, 即使初值极小, 零解也不稳定 (图 2(c)). 实际上, 若计算时间充分长, 运动最终将会稳定在一个大幅值极限环上 (从不稳定解上分岔出来).



(a) $V = 31, x_0 = (0.003, 0, 0, 0)$



(b) $V = 31, x_0 = (0.005, 0, 0, 0)$



(c) $V = 32, x_0 = (0.001, 0, 0, 0)$

图2 亚临界 Hopf 分岔分岔前后的时间历程:

(a) 分岔前; (b) 分岔后

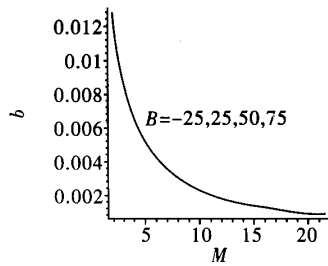
Fig 2 Time histories before and after subcritical Hopf bifurcation:

(a) Before bifurcation; (b) after bifurcation

3 系统参数对 Hopf 分岔的影响

对于超临界 Hopf 分岔, 颤振极限环的大小是随速度增加而从零逐步增大的, 因此对机翼的危害性较小. 而对于亚临界 Hopf 分岔, 颤振表现为突然出现的大幅值极限环, 机翼将产生强烈振动, 带来很大危害性. 由式(8)知, Hopf 分岔类型由 $a \times b$ 的符号所决定: $a \times b < 0$ 是超临界; $a \times b > 0$ 是亚临界. 计算得到规一化非线性刚度系数 B 取不同值时 ($B = -25, 25, 50, 75$), a 和 b 与马赫数 M 的关系如图3所示. 由图可见, B 和 M 的变化对 a 和 b 都有较大影响, 但 b 始终大于 0, 因此分岔类型实际上取决于 a 的正负 ($a < 0$ 为超临界; $a > 0$ 为亚临界). 对于 $B = 25, 50, 75$, 只有当马赫数增大到临界值 (以下称临界马赫数) $M_c = 11.02, 15.57, 19.62$ 时, a 由负变为正, 分岔才由超临界变为亚临界. 而 $B = -25$ 时, a 始终为正, Hopf 分岔必然是危害性较大的亚临界形式.

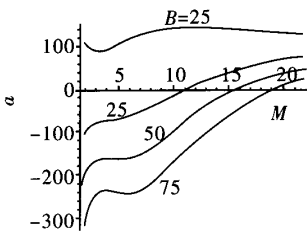
图4给出了临界马赫数与 B 和 x_0 (悬挂点与质心位置之比) 的关系. 由于现代飞行技术特别是航天事业的发展, 人们要求速度更快但更安全的飞行. 为此须提高临界马赫数. 图4显示, B 越大,



(b)

图3 结构和飞行参数对于分岔系数 a 和 b 的影响

Fig 3 Influences of the structural and flight parameters on the bifurcation parameters a and b



(a)

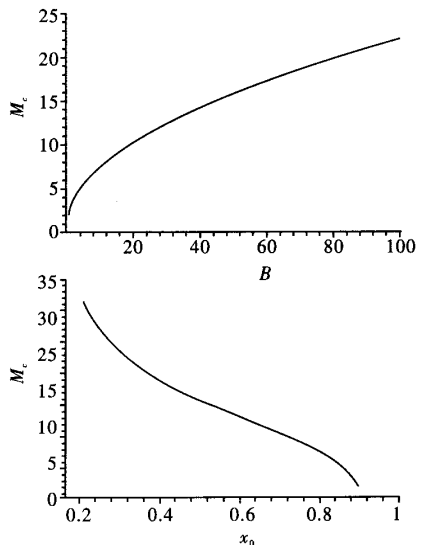


图4 临界马赫数与 B 和 x_0 的关系

Fig 4 Relations between the critical Mach number and B and x_0

临界马赫数也越大,因此具有“硬”弹簧性质的结构更安全,而应避免应用“软”弹簧性质的结构($B < 0$).另一方面,增大悬挂点与质心的距离有助于提高临界马赫数.

4 结论

不可压缩流中具有结构和气动立方非线性的二元机翼系统的零平衡点通过 Hopf 分岔而失稳,产生颤振.对于高超音速飞行状况,当飞行马赫数相对较小时,分岔为超临界的,颤振极限环缓慢增大,对飞行安全危害较小.当马赫数相对较大时,分岔为亚临界的,在接近和超过分岔点后,颤振响应可能会跳到大幅值极限环上,机翼产生危害较大的强烈振动,在设计中应予以避免.研究表明,出现亚临界 Hopf 分岔的临界飞行马赫数随着非线性刚度系数而提高,因此具有“硬”弹簧性质的结构更安全,而应避免应用“软”弹簧性质的结构.另一方面,增大悬挂点与质心的距离也有助于提高临界马赫数.

参 考 文 献

- 1 Zhao LC, Yang ZC. Chaotic motions of an airfoil with non-linear stiffness in incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 138: 245~254
- 2 Yang ZC, Zhao LC. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 123: 1~13
- 3 刘济科. 二元机翼颤振的分岔点类别的判定. 力学与实践, 1998, 20: 38~40 (Liu Jike. On the type of bifurcation point of 2-dimensional airfoil flutter. *Mechanics and Practice*, 1998, 20: 38~40(in Chinese))
- 4 Price SJ, Lee BHK, Alighanbari H. An analysis of the post-instability behaviour of a two-dimensional airfoil with a structural non-linearity. *Journal of Aircraft*, 1994, 31: 1395~1401
- 5 Singh SN, Brenner M. Limit cycle oscillation and orbital stability in aeroelastic systems with torsional non-linearity. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31: 435~450
- 6 丁千, 陈予恕. 用胞映射法分析双线结构刚度的机翼颤振性. 空气动力学学报, 2002, 20: 123~132 (Ding Qian, Chen Yushu. Analysis of an aeroelastic system with bilinear stiffness using cell-mapping method. *ACTA Aerodynamica Sinica*, 2002, 20: 123~132(in Chinese))
- 7 Ashley H, Zartarian G. Piston theory — a new aerodynamic tool for the aeroelastician. *Journal of the Aeronautical Science*, 1956, 23: 1109~1118
- 8 Librescu L, Chiochia G. Implications of cubic physical/aerodynamic non-linearities on the character of the flutter instability boundary. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 173~199
- 9 吴志强. 多自由度非线性系统的非线性模态及 Normal Form 直接方法. [博士论文]. 天津: 天津大学, 1996 (Wu ZQ. Nonlinear mode and normal form method of MDOF nonlinear systems. [Ph D Thesis]. Tianjin: Tianjin University, 1996(in Chinese))

STUDY ON AIRFOIL FLUTTER WITH CUBIC STRUCTURAL AND AERODYNAMICAL NONLINEARITY*

Ding Qian Wang Dongli

(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

Abstract This paper studied the flutter of a two-dimensional airfoil in the supersonic flow with cubic physical and aerodynamic non-linearity. First, the characteristic value of the system in the neighborhood of equilibrium point was analyzed, and the parametric equations of flutter were obtained in the vicinity of Hopf bifurcation point. Then, the normal form of Hopf bifurcation was deduced by applying the normal form direct method, and the dependence of response on initial values was certified by numerical analysis in the super- and sub-critical cases. Finally, study on the topological structure of bifurcation showed that the "hard" structural non-linearities render the airfoil safer, whereas the "soft" ones render the airfoil unsafe, and that increasing the distance between the center of mass and the elastic axis appears to be beneficial from the point of view of the aeroelastic response.

Key words structural and aerodynamic non-linearity, flutter, Hopf bifurcation, normal form, flight Mach number