

部分充液卫星的非线性稳定性和动力学分析*

朱金林 岳宝增

(北京理工大学理学院力学系,北京 100081)

摘要 针对简化了的部分充液卫星模型,分析了系统的非线性稳定性,指出了系统发生 Hopf 分岔的临界参数,并用中心流形方法研究了其稳定性.最后,通过相平面轨迹和基于最大 Lyapunov 指数的参数图,分析了系统的非线性机制.

关键词 稳定性,分岔,混沌, Lyapunov 指数,充液卫星

引言

随着以混沌为主要内容的非线性动力学的兴起及相关成果在工程界的普及,近年来关于航天器姿态运动的混沌性态研究取得了令人瞩目的进展^[1-4].本文主要讨论简化了的部分充液卫星的稳定性和非线性动力学行为.应用 Lyapunov 直接法分析了系统的稳定性,得出其稳定性的充分条件;研究了 Hopf 分岔的稳定性;进一步通过数值模拟,分析系统的非线性特征,从而为工程设计提供一定的依据.

1 部分充液系统的状态方程

设卫星内部有一对称圆柱形贮箱,其中部分充有理想不可压缩的流体(带自由液面).以卫星刚体的质心 O 为原点建立惯性坐标系 $O - \xi\eta\zeta$ 和与卫星固连的本体坐标系 $O - xyz$,而取 Ox, Oy, Oz 为当液体固化后,系统的三个惯性主轴,且设 A, B, C 为主转动惯量(液体和刚体部分);系统的质心 G 位于 Z 轴上,它距 O 点的距离为 Z_0 ;以 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 表示卫星的瞬时角速度 ω 在 x, y, z 三个轴上的投影.

如以 H 表示充液系统(液体和刚体)对 O 点的动量矩,而 M 为作用于系统上的外力对 O 点的主矩,则充液系统的欧拉动力学方程可写为

$$\frac{dH}{dt} + \omega \times H = M \quad (1)$$

如果结合工程需要,作必要的组合与简化,并考虑到(1)式,则可列出对于系统的三个惯性主轴的充液系统的动力学方程式为^[5-6]

$$A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 + \dot{h}_1 + \omega_2h_3 -$$

$$\begin{aligned} \omega_3h_2 &= M_x^L + mgz_0\beta \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 + \dot{h}_2 + \omega_3h_1 - \\ \omega_1h_3 &= M_y^L - mgz_0\alpha \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 + \dot{h}_3 + \omega_1h_2 - \\ \omega_2h_1 + b\omega_3 &= M_z^L \end{aligned} \quad (2)$$

其中 b 为阻尼系数, m 为系统的质量, g 为重力加速度: $g_I = \alpha_I g$, 而 $(0 < \alpha_I < 1)$; $h_i = (i = 1, 2, 3)$ 为飞轮的角动量,三个飞轮分别安装在 Ox, Oy, Oz 轴上,且设飞轮的角动量为常数,即 $h_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3$),并忽略飞轮在运动过程中受到摩擦等阻尼力矩.飞轮是严格对称的,其转动轴在卫星上是固定的,可设 $A = B$.

在微重条件下,部分充液系统晃动问题,一般比较复杂,需要联立求解充液系统方程和液体晃动的动力学问题(带有边界条件).在这里,我们假定 $\alpha_I \rightarrow 0$,另外,引进外力矩 M_x^L, M_y^L, M_z^L ,来模拟液体晃动对卫星系统姿态的影响(不考虑液体的纵向晃动).从而把充液系统方程与液体晃动的动力学方程,以下列的方式联系起来,即认为外力矩是

$$\begin{aligned} M_x^L &= \mu_{xy}\omega_2 \\ M_y^L &= \mu_{yx}\omega_1 \\ M_z^L &= 0 \end{aligned}$$

其中 μ_{xy}, μ_{yx} 是与液体晃动等因素有关的系数.于是,(2)可写为

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_2\omega_3 + \omega_2h_3 - \\ \omega_3h_2 &= \mu_{xy}\omega_2 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 + \omega_3h_1 - \\ \omega_1h_3 &= \mu_{yx}\omega_1 \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 + \omega_1h_2 - \\ \omega_2h_1 + b\omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

2004-07-03 收到第1稿,2004-09-05 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272022)

2 稳定性分析

利用经典的 Lyapunov 直接法^[7]来研究系统(3)的稳定性. 系统(3)有唯一平衡点(0,0,0), 对于受扰运动, 则有 $\omega_1 = x, \omega_2 = y, \omega_3 = z$, 从而, 可得系统的受扰运动微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - \frac{C}{A})yz + \frac{h_2}{A}z - \frac{h_3}{A}y + \frac{\mu_{xy}}{A}y \\ \dot{y} &= -(1 - \frac{C}{A})xz + \frac{h_3}{A}x - \frac{h_1}{A}x + \frac{\mu_{yx}}{A}x \\ \dot{z} &= -\frac{h_2}{C}x + \frac{h_1}{C}y - \frac{b}{C}z \end{aligned} \quad (4)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V = x^2 + y^2 + \frac{C}{A}z^2 + xy + xz$$

则函数 V 对时间 t 的全导数为

$$\dot{V} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + \dots$$

其中省略号代表是高阶项

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\mu_{xy} + h_3}{A} - \frac{h_2}{C}, \\ a_{22} &= \frac{\mu_{yx} - h_3}{A}, a_{33} = \frac{h_2 - b}{A} \\ a_{12} &= \frac{\mu_{xy} + \mu_{yx}}{A} + \frac{h_1}{2C}, \\ a_{23} &= \frac{h_2 + \mu_{xy} - h_3}{2A}, \\ a_{13} &= \frac{-h_1}{2A} - \frac{b}{2C} \end{aligned}$$

根据 Sylvester 定理, 函数 V 正定的充分条件是

$$\frac{C}{A} > \frac{1}{3}$$

\dot{V} 负定的充分条件是

$$\begin{aligned} a_{11} < 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - \\ a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 < 0 \end{aligned}$$

上式也就是系统稳定的充分条件.

3 中心流形方法的应用

对于非线性动力系统, 系统参数连续变动时, 可能引起系统状态定性行为发生拓扑性变化, 这种

状态的变化称为分岔. 这里, 我们主要讨论系统(3)的 Hopf 分岔. 假定 $h_1 = h_2, \mu_{xy} = \mu_{yx}$, (4) 可重写为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} + f(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 \quad (5)$$

其中 $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mu_{xy} - h_3}{A} & \frac{h_1}{A} \\ \frac{h_3 + \mu_{yx}}{A} & 0 & -\frac{h_1}{A} \\ -\frac{h_1}{C} & \frac{h_1}{C} & -\frac{b}{C} \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}) \\ f_2(\mathbf{X}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $f_1(\mathbf{X}) = (1 - \frac{C}{A})yz, f_2(\mathbf{X}) = -(1 - \frac{C}{A})xz$,

由 n 维 Hopf 分岔定理知: 当 $\mu_{xy} = -\frac{bA}{C}$ 时, Jacobian 矩阵 \mathbf{P} 的特征值为一对纯虚数

$$\pm i\sqrt{\frac{h_3^2}{A^2} + \frac{2h_1^2}{AC} - \frac{b^2}{C^2}} = \pm i\xi \text{ 和一个实数 } -\frac{b}{C}.$$

对于临界情形的非线性系统, 即一次近似系统的特征值具有零实部, 一次近似方法失效, 下面我们利用微分动力系统中心流形定理来判别临界情形的稳定性.

首先, 对(5)引入线性变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$, 其

中 \mathbf{T} 是由 Jacobian 矩阵 \mathbf{P} 的特征向量构成的矩阵,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{C} - \frac{h_3}{A} & h_1 \\ -1 & \frac{b}{C} - \frac{h_3}{A} & h_1 \\ 0 & \frac{2h_1}{C} & h_3 \end{bmatrix}$$

于是(5)可化为若当标准形

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} +$$

$$\mathbf{T}^{-1}f(\mathbf{T}\mathbf{q}) \quad (6)$$

其中

$$T^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{Abh_3 - Ch_3^2 - 2Ah_1^2}{A^2C} & \frac{Abh_3 + Ch_3^2 + 2Ah_1^2}{A^2C} & -\frac{2bh_1}{AC} \\ \frac{h_3}{A} & \frac{h_3}{A} & -\frac{2h_1}{A} \\ -\frac{2h_1}{C} & -\frac{2h_1}{C} & -\frac{2h_3}{A} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{-2Ch_3^2 - 4Ah_1^2}{A^2C}$$

$$f(Tq) = \left(1 - \frac{C}{A}\right) \begin{bmatrix} -\frac{2h_1}{C}q_1q_2 + \frac{2h_1}{C}\left(\frac{b}{C} - \frac{h_3}{A}\right)q_2^2 + \\ \left(\frac{2h_1^2 + bh_3}{C} - \frac{h_3^2}{A}\right)q_2q_3 + \\ h_3q_1q_3 + h_1h_3q_3^2 \\ -\frac{2h_1}{C}q_1q_2 + \frac{2h_1}{C}\left(\frac{b}{C} + \frac{h_3}{A}\right)q_2^2 + \\ \left(\frac{2h_1^2 + bh_3}{C} + \frac{h_3^2}{A}\right)q_2q_3 - \\ h_3q_1q_3 - h_1h_3q_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

经过复杂的计算,得到微分动力系统(5)的一个中心流形

$$h(q_1, q_2) = (C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_1^2 - \left(\frac{b^3 - bC^2\xi + 2bC^2\xi^2}{C\xi}\right)q_1q_2 + (b^2 - C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_2^2$$

根据中心流形定理,将此中心流形代入(6)的前二个方程,得到降为二维的非线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中

$$f_1(q) = \frac{A-C}{\Delta A} \left\{ -\frac{4bh_1h_3}{AC^2}q_1q_2 + \left(\frac{4b^2h_1h_3}{AC^3} + \frac{4Ah_1^2h_3 + 2Ch_3^3}{A^3C}\right)q_2^2 + \left[\frac{2b^2h_3^2}{AC^2} + \left(\frac{Ch_3^2 + 2Ah_1^2}{A^2C}\right)\right] \times \left(\frac{2Ch_3^2 - 4Ah_1^2}{AC}\right) \right\} [(C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_1^2q_2 - \left(\frac{b^3 - bC^2\xi + 2bC^2\xi^2}{C\xi}\right)q_1q_2^2 + (b^2 - C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_2^3] - \left(\frac{2Ch_3^3 + 4bAh_1^2h_3}{A^2C}\right) [C^2\xi + 2C^2\xi^2]q_1^3 - \left(\frac{b^3 - bC^2\xi + 2bC^2\xi^2}{C\xi}\right)q_1^2q_2 +$$

$$(b^2 - C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_1q_2^2] - \left(\frac{2h_1h_3^2 + 4Ah_1^3h_3}{A^2C}\right) [(C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_1^2 - \left(\frac{b^3 - bC^2\xi + 2bC^2\xi^2}{C\xi}\right)q_1q_2 + (b^2 - C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_2^2]^2$$

$$f_2(q) = \frac{A-C}{\Delta A} \left[-\frac{4h_1h_3}{AC}q_1q_2 + \frac{4h_1h_3b}{AC^2}q_2^2 + \frac{2bh_3^2}{AC}(C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_1^2q_2 - \left(\frac{b^3 - bC^2\xi + 2bC^2\xi^2}{C\xi}\right)q_1q_2^2 + (b^2 - C^2\xi + 2C^2\xi^2)q_2^3 \right]$$

根据 Hopf 分岔稳定性准则

$$a = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial q_1^3} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial q_1 \partial q_2^2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial q_1^2 \partial q_2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial q_2^3} \right) + \frac{1}{16\omega} \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1 \partial q_2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} \right) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_2} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} \right) \right] - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = \frac{1}{16\Delta} \left(1 - \frac{C}{A} \right) \times$$

$$\left\{ -\frac{(2Ch_3^3 + 4h_1^2 h_3)(b^2 + 4C^2 \xi^2)}{A^2 C} + \left[\frac{2b^2 h_3^2}{AC^2} + \frac{(Ch_3^3 + 2Ah_1^2)(2Ch_3^2 + 4Ah_1^2)}{A^3 C^2} \right] \times \left(\frac{-b^3 + bC^2 \xi - 2bC^2 \xi^2}{C\xi} \right) + \frac{2bh_3^2(b^2 + 4C^2 \xi^2)}{AC} + \frac{1}{16\omega\Delta^2} \left(1 - \frac{C^2}{A} \right) \left(\frac{16bh_1^2 h_3^2}{A^2 C^3} \right) \right\} \quad (8)$$

当 $a < 0$ 时, 极限环稳定; 当 $a > 0$ 时, 极限环不稳定. 对于准则(8), 给定参数 $A = 500, C = 1000, h_2 = 1200, h_3 = 300, \mu_{xy} = \mu_{yx} = 50$, 总保持稳定的.

4 数值模拟

在前面的研究中, 航天器处于无力矩状态. 然而, 在实际中, 航天器由于外部环境的影响, 总会受到外部变化的激励矩. 这里, 我们认为转子的角动量 h_3 , 由于电压不稳或其他因素, 而表示为 $h_3(1 + r \cos \omega t)$. 方程(4)可重写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(1 - \frac{C}{A}\right)yz + \frac{h_2}{A}z - \frac{h_3(1 + r \cos \omega t)}{A}y + \frac{\mu_{xy}}{A}y \\ \dot{y} &= -\left(1 - \frac{C}{A}\right)xz + \frac{h_3(1 + r \cos \omega t)}{A}x - \frac{h_1}{A}z + \frac{\mu_{yx}}{A}x \\ \dot{z} &= -\frac{h_2}{C}x + \frac{h_1}{C}y - \frac{b}{C}z + \frac{h_3 r \sin \omega t}{C} \end{aligned} \quad (9)$$

给定参数 $A = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, C = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \mu_{xy} = \mu_{yx} = 50, h_1 = h_2 = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}, h_3 = 250 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}, b = 200, \omega = 1.0 \text{ Hz}$. 在三维空间进行数值模拟, 利用四阶 Runge-Kutta 法, 对方程(9)进行数值积分. 如图 1 所示, 当 $r = 3.0$ 时, 表现出确定性的周期运动; 当 $r = 14.6$ 时, 表现出奇怪吸引子的混沌运动. 图 2 为最大指数 Lyapunov^[8] - 参数激励的幅值 r 的参数图.

仿真计算表明: 系统运动的分岔特性与参数激励幅值有关, $r > 11.15$, 表现出明显的持续的混沌运动.

进一步的混沌运动的分析, 将在以后给出.

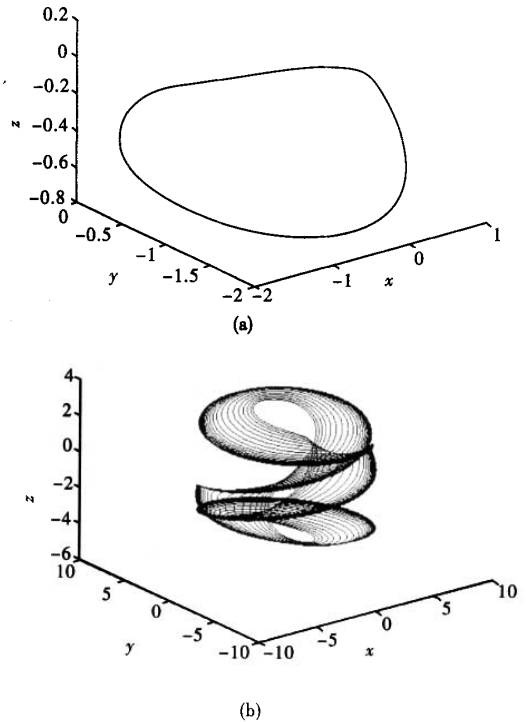


图 1 相空间轨迹
Fig. 1 Trajectories of phase space

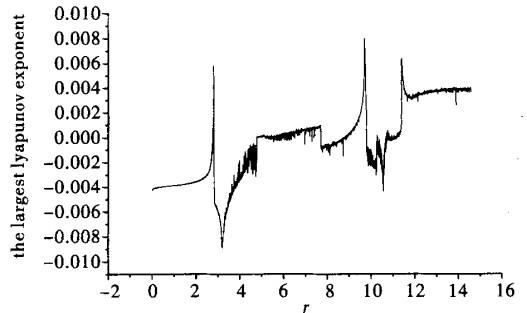


图 2 $r \in (0, 14.6)$ 对应的最大 Lyapunov 指数
Fig. 2 The largest Lyapunov exponents for r between 0 and 14.6

参 考 文 献

- 1 刘延柱, 彭建华, 陈立群. 航天器混沌姿态运动研究进展. 自然科学进展, 1998, 8(4): 385~390 (Liu Yanzhu, Peng Jianhua, Chen Liqun. Study on chaos attitude motion of spacecraft and its advance. *Advance of Natural Science*, 1998, 8(4): 385~390 (in Chinese))
- 2 刘延柱, 成功. 挠性联结双体航天器的稳定性和分岔. 力

- 学学报, 2000, 32 (2): 207 ~ 212 (Liu Yanzhu, Cheng Gong. Stability and bifurcation of two-body satellite with flexible connection. *ACTA MECHANICA SINICA*, 2000, 32(2):207~212(in Chinese))
- 3 刘延柱, 陈立群, 成功, 戈新生. 航天器姿态动力学的稳定性、分岔和混沌. 力学进展, 2000, 30 (3): 351 ~ 357 (Liu Yanzhu, Chen Liqun, Cheng Gong, Ge Xinsheng. Stability, bifurcation and chaos in spacecraft attitude dynamics. *Advances in mechanics*, 2000, 30 (3): 351 ~ 357 (in Chinese))
- 4 Andrew J Miller, Gary L Gray, Andre P Mazzoleni. Non-linear Spacecraft Dynamics with a Flexible Appendage, Damping, and Moving Internal Submasses. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2001, 24(3):605~615
- 5 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学. 北京: 科学出版社, 2002 (Wang Zhaolin, Liu Yanzhu. Dynamics of Liquid-filled System. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 6 王照林. 运动稳定性及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1992 (Wang Zhaolin. Stability of Motion and Its Application. Beijing: High Education Press, 1992(in Chinese))
- 7 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2001 (Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear Vibration. Beijing: Hige Education Press, 2001(in Chinese))
- 8 Wolf A, Swift JB, Swinney HL, VASANO JA. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16(3):285~317

NONLINEAR STABILITY AND DYNAMICS ANALYSIS OF A SATELLITE WITH PARTIALLY FILLED LIQUID *

Zhu Jinlin Yue Baozeng

(Department of Mechanics, School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract This paper studied the nonlinear stability and dynamics behaviors of a simplified partially-filled satellite. The sufficient condition for the stability of the satellite was obtained using Lyapunov direct method. The critical parameter for Hopf bifurcation was obtained and the stability of Hopf bifurcation was discussed. Moreover, By the track in the phase space and the largest Lyapunov exponent, the nonlinear mechanism of the system was analyzed.

Key words stability, bifurcation, chaos, Lyapunov exponent, liquid-filled satellite