

带刚性限位的双层隔振系统的离散模型*

贺 华¹ 冯 奇¹ 汪 玉²

(1. 同济大学固体力学教育部重点实验室, 上海 200092)

(2. 海军论证中心, 北京 100037)

摘要 研究了由多刚体组成的带刚性限位的双层隔振系统. 基于单项约束多体动力学理论, 并采用摄动方法导出了该系统的离散 Poincaré 映射. 运用此方法, 研究了 MTU 公司生产的柴油机隔振系统对冲击作用的振动响应. 研究表明: 由于可能发生碰撞, 该系统呈现复杂的非线性特性; 并且在无限位情况下可以忽略的弱非线性项对带限位的碰撞振动系统也可能有较大的影响. 该研究对如何正确设计带刚性限位的双层隔振系统提供了理论参考依据.

关键词 双层隔振, 碰撞振动, 多点碰撞, 映射, 分岔

引言

对于双层隔振系统, 为防止上层系统振幅过大, 常采用在两层隔振系统间加限位器来限制其位移. 在冲击条件下, 上层系统与限位器可能发生碰撞振动, 从而有可能导致破坏. 这就属于 vibro-impact 问题, 是非光滑研究领域的一个热点问题, 但此类研究工作多是针对质量弹簧阵子^[1~2]. 文献[3]指出带限位的单层隔振系统有可能发生混沌运动. 本文针对一个由两个刚体和几十个隔振器、限位器组成的双层隔振系统, 对其冲击后运动进行了分析, 指出其可能发生复杂的非线性运动.

1 数学模型

带限位的双层隔振系统可简化为图 1 所示的由

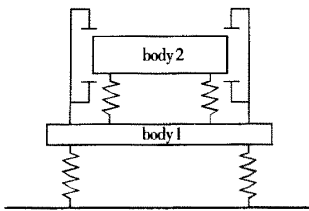


图 1 双层隔振系统模型

Fig. 1 The model of a two stage isolation system

m 个三向弹簧支承的两刚体系统, 为了防止刚体 2 的位移过大, 在两刚体间还安装了 n 个限位器.

惯性基 e 固结于基础, 连体基 b_i 固结于刚体质心. 姿态坐标取卡尔丹角坐标 $\theta_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. 刚体质心在惯性基的坐标为 $r_{ci}(r_{1ci}, r_{2ci}, r_{3ci})$, 刚体质心位移用 $r_i(r_{1i}, r_{2i}, r_{3i})$ 表示. 隔振系统的位移可以用 $X = [r \ \theta_1 \ r_2 \ \theta_2]^T$ 来描述. 因为双层隔振系统的振幅很小, 所以连体基和惯性基之间的坐标转换阵为

$$A_{Ib_i} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_i & \beta_i \\ \gamma_i & 1 & -\alpha_i \\ -\beta_i & \alpha_i & 1 \end{bmatrix}$$

图 2 描述了分别固结于两刚体的两点之间的距离. 点 $i(b_{1i}\rho_{1i}, b_{1i}\rho_{2i}, b_{1i}\rho_{3i})$ 和点 $i'(b_{2i}\rho_{1i}', b_{2i}\rho_{2i}', b_{2i}\rho_{3i}')$

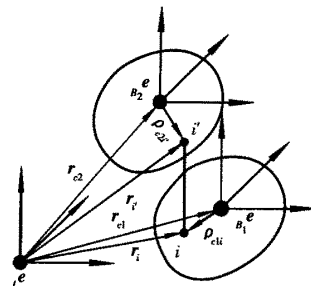


图 2 分别固结于两刚体之间的两点间距离

Fig. 2 The model of two points mounted on different bodies

2004-04-15 收到第 1 稿, 2004-05-10 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10072040)

分别固结于刚体 B_1 和 B_2 , 文中 $(\tilde{\cdot})$ 表示 (\cdot) 的坐标方阵, r 表示惯性基下的矢径, ρ 表示连体基下的矢径, 未说明的变量 A_i 均为和弹簧参数有关的系数矩阵.

两点间距离变化为

$$\Delta r_{i1} = r_2 + B_2 \rho_{c2i} - r_1 - B_1 \rho_{c1i} - r_{c2i0} + r_{c1i0}$$

写成坐标方阵的形式为

$${}_i \Delta r_i = [-E \quad \tilde{\rho}_{c1i} \quad E \quad -\tilde{\rho}_{c2i}] X \quad (1)$$

弹簧刚度为 $K_i = \text{diag}(CT_i, CL_i, CV_i)$. 每个弹簧作用于两刚体的力和力矩分别为

$${}_i F_i = K_i \Delta r_i^T = [-K_i \quad A_{1i} \quad K_i \quad -A_{5i}] X \quad (2)$$

$${}_{B_1} M_{C1i} = A_{1i}^T r_1 + A_{6i} \theta_1 + A_{7i}^T r_2 - A_{7i} \theta_2 -$$

$$A_{3i} \theta_1 + A_{3i} z_{2i} + A_{4i} \Gamma_{11} - A_{8i} \Gamma_{12} =$$

$$[A_{1i}^T \quad A_{6i} \quad -A_{7i}^T \quad -A_{7i}] X + \Pi_1 \quad (3)$$

$${}_{B_2} M_{C2i} = A_{5i}^T r_1 + A_{9i} \theta_1 - A_{5i}^T r_2 - A_{10i} \theta_2 -$$

$$A_{11i} z_{12} + A_{11i} \theta_2 + A_{12i} \Gamma_{12} - A_{13i} \Gamma_{22} =$$

$$[A_{5i}^T \quad A_{9i} \quad -A_{5i}^T \quad -A_{10i}] X + \Pi_2 \quad (4)$$

其中

$$\Gamma_{ni} = [\alpha_n \alpha_i \quad \beta_n \beta_i \quad \gamma_n \gamma_i \quad \alpha_n \beta_i$$

$$\alpha_n \beta_i \quad \beta_n \gamma_i \quad \alpha_i \beta_n \quad \alpha_i \gamma_n \quad \beta_i \gamma_n]^T$$

$$z_{ni} = [\beta_n r_{1i} \quad \gamma_n r_{1i} \quad \alpha_n r_{2i} \quad \gamma_n r_{2i} \quad \alpha_n r_{3i} \quad \beta_n r_{3i}]^T$$

$$\theta_i = [\beta_i r_{1i} \quad \gamma_i r_{1i} \quad \alpha_i r_{2i} \quad \gamma_i r_{2i} \quad \alpha_i r_{3i} \quad \beta_i r_{3i}]^T$$

文中的限位器考虑为点点碰撞, 每个接触对之间的距离为 $g_{Ni} = W_{Ni} X + g_0$, 其中 g_0 是接触对之间的初始距离, 对于横向、纵向和垂向限位器, W_{Ni} 分别等于 ${}_i \Delta r_{1i}$, ${}_i \Delta r_{2i}$ 和 ${}_i \Delta r_{3i}$.

根据牛顿-欧拉方程和牛顿碰撞率, 并考虑隔振系统存在比例阻尼, $C = \alpha M + \beta K$, $\alpha = 3$, $\beta = 0.00008$, 系统的运动方程如下

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX + DW = \Pi + P \quad (5)$$

$$g_{Ni} \geq 0, (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$\dot{g}_{Ni}^+ = -\epsilon \dot{g}_{Ni}^-, (i=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

其中 P 是作用在两刚体上的合力或合力偶

$$M = \text{diag}(m_1 E, J_{c1}, m_2 E, J_{c2}), \quad W = [0, W_1, 0, W_2]^T,$$

$$W_i = [\beta_i \gamma_i \quad \dot{\alpha}_i \gamma_i \quad \dot{\alpha}_i \beta_i]^T, \quad D = \text{diag}(0, D_1, 0, D_2),$$

$$D_i = \text{diag}(-J_{C22} + J_{C33}, J_{C11} - J_{C33}, -J_{C11} + J_{C22})$$

方程(5)是自由项的运动方程; 不等式(6)定义了隔振系统的运动空间; 方程(7)给出了碰撞前后碰撞点的速度关系. 上标“-”和“+”分别表示碰撞前后. ϵ 是恢复系数.

考虑运动方程(5)为弱非线性方程^[4], 对正弦型外载 $P = p \sin(\theta t)$, 可应用摄动法求解^[5], 方程(5)等

价于

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = \epsilon f(X, \dot{X}) + P \quad (8)$$

式中 $f(X, \dot{X})$ 为方程(5)中的非线性项函数, ϵ 为无量纲的定常微小量, 假设下式为方程(8)的近似解

$$X = X_0 + \epsilon X_1 \quad (9)$$

将式(9)代入方程(8)得

$$M(\ddot{X}_0 + \epsilon \ddot{X}_1) + C(\dot{X}_0 + \epsilon \dot{X}_1) + K(X_0 + \epsilon X_1) = \epsilon f(X_0 + \epsilon X_1, \dot{X}_0 + \epsilon \dot{X}_1) + P \quad (10)$$

顺次令方程(10)等号两边 ϵ 的同次项相等, 并忽略 $\epsilon^n (n \geq 2)$ 的项, 可得

$$\epsilon^0: M\ddot{X}_0 + C\dot{X}_0 + KX_0 = P \quad (11)$$

$$\epsilon^1: M\ddot{X}_1 + C\dot{X}_1 + KX_1 = f(X_0, \dot{X}_0) \quad (12)$$

令 $X_0 = \Phi q_0$, 通过模态分析法, 可以方便的得到方程(11)的解析解. 将 $X_1 = \Phi q_1$ 代入(12)式可将其解耦为

$$\ddot{q}_i + \Lambda_{1i} \dot{q}_i + \Lambda_{2i} q_i = \frac{\Phi^T}{M^*} f(X_0, \dot{X}_0) \quad (13)$$

其中 $\Lambda_{1i} = 2\zeta_i \omega_i$, $\Lambda_{2i} = \omega_i^2$.

由以上内容可知, 多刚体隔振系统的非线性项由位移或速度的二次耦合项组成, 即由或 $x_n x_i = \Phi_n q_n \Phi_i q_i = \sum \sum \varphi_{ni} \varphi_{ij} q_{0i} q_{0j}$ 或 $\dot{x}_n \dot{x}_i = \Phi_n \dot{q}_n \Phi_i \dot{q}_i = \sum \sum \varphi_{ni} \varphi_{ij} \dot{q}_{0i} \dot{q}_{0j}$ 构成. 取同一时刻的线性部分的解 q_0, \dot{q}_0 代入 f 就可得常数列向量 $g = f(X_0, \dot{X}_0)$, 这样就可得方程(13)的解 $q_1 = \Phi^T g / M^* \Lambda_i^2$. 再将 $X_1 = \Phi q_1$ 代入方程(9)就得到了有非线性影响的一级近似解.

如果在某一时刻 t_k 有限位器发生碰撞, 则至少有一个碰撞对满足 $g_{Ni} = 0$. 对这些碰撞对, 将 $g_{Ni} = W_{Ni} \Phi q + g_0$, $\dot{g}_{Ni}^- = W_{Ni} \Phi \dot{q}^-$ 和 $\dot{g}_{Ni}^+ = W_{Ni} \Phi \dot{q}^+$ 代入方程(6)和(7)得到用广义坐标表示的碰撞条件.

$$g_{Ni} = W_{Ni} \Phi q + g_0 \quad \exists i \in (1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

$$W_{Ni}^T \Phi \dot{q}^+ = -\epsilon W_{Ni}^T \Phi \dot{q}^- \text{ 若 } W_{Ni}^T \Phi \neq 0 \text{ 则}$$

$$\dot{q}_i^+ = -\epsilon \dot{q}_i^- \quad (15)$$

刚体整个运动可分成两个阶段: ①冲击阶段: 由于冲击荷载作用时间较短, 冲击强度较大, 因此在这个阶段有限力的影响和限位器的作用忽略不计. ②冲击后阶段: 刚体获得了初速度, 在有限力作用下发生强迫振动, 由于冲击获得的能量较大, 而大位移的振动受到限位器限制, 形成碰撞振动系统. 故冲击后阶段运动又分成两个相, 自由振动相与碰撞接触相.

冲击阶段的运动方程如方程(5), 其中外力

$$P = -M \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{u} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\ddot{u} = 500 \sin(\pi t / 9 \times 10^{-3})$$

不考虑冲击前的影响, 冲击后的位移、速度可以由摄

动法得到.

冲击后阶段系统可能发生多次碰撞,系统的运动方程同方程(5),(6)和(7)其中外力为

$$P = \sin \theta t \cdot$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ p_\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ p_\alpha \ p_\beta \ 0]^T$$

考虑碰撞前状态,可以推导得到如下映射方程

$$\begin{aligned} q_{0i}(k+1) &= e^{-\zeta_i \omega_i \Delta t_k} (C_{i1} \cos \omega_i \Delta t_{k+1} + C_{i2} \sin \omega_i \Delta t_{k+1}) + \\ & C_{i3} \cos \theta t_{k+1} + C_{i4} \sin \theta t_{k+1} + q_{1i} \\ q_{0i}(k+1) &= -C_{i0} C_{i1} e^{-\zeta_i \omega_i \Delta t_k} \sin(\omega_i \Delta t_{k+1} + \theta_i) - \\ & C_{i3} \theta \sin \theta t_{k+1} + C_{i0} C_{i2} e^{-\zeta_i \omega_i \Delta t_k} \cos(\omega_i \Delta t_{k+1} + \theta_i) + \\ & C_{i4} \theta \cos \theta t_{k+1} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 t_k 是碰撞时间, Δt_k 是 t_k 和 t_{k+1} 之间的自由振动时间,由方程(12)求出 Δt_{ki} ,其中的最小值就是 Δt_k .

2 实例分析及计算结果讨论

采用图1所示的系统进行计算,取 $m=35, n=$

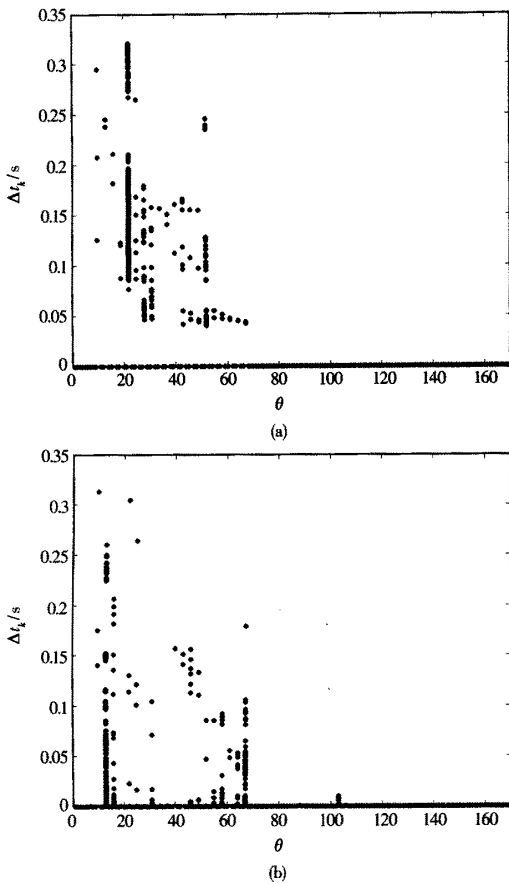


图3 碰撞时间间隔随外激励频率的分岔图
Fig. 3 The bifurcation diagrams for Δt_k verse external frequencies

22, $p_\alpha=100000 \text{ Nm}$, $p_\beta=100000 \text{ Nm}$,其它系统参数略.

图3给出了碰撞时间间隔随外激励频率的分岔图,横坐标为外激励圆频率,纵坐标为碰撞时间间隔 Δt_k . (a)图为忽略弱非线性项的结果,(b)图为考虑弱非线性项的结果.对比两图可以发现弱非线性项对系统的影响还是比较大的,两张分岔图在形状上有较大的差别.

图4给出了外激励圆频率为22时的庞加莱图,(a)图为忽略弱非线性项的结果,(b)图为考虑弱非线性项的结果,对比两图可以看出在忽略弱非线性项时系统呈现出复杂运动,在考虑弱非线性项时变成了倍周期运动.

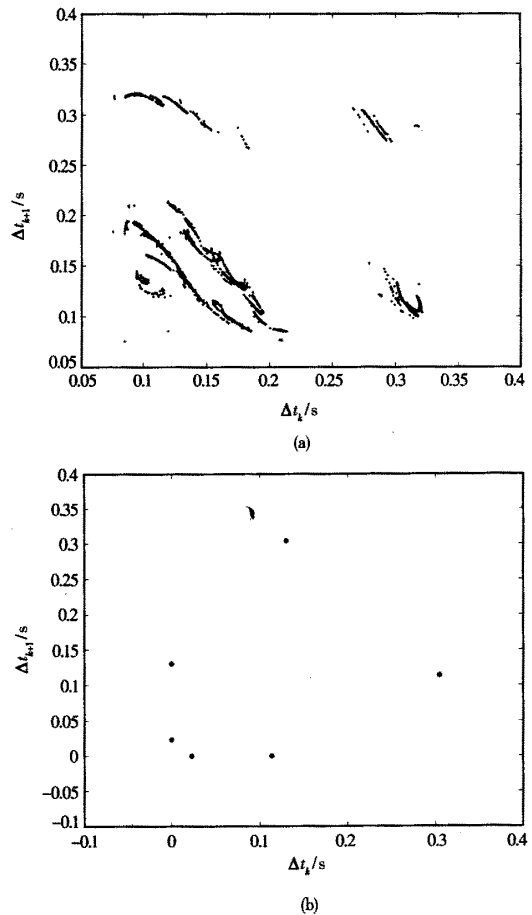


图4 碰撞时间间隔随外激励频率的分岔图
Fig. 4 The Poincaré diagrams

3 结论

本文建立了带限位的双层隔振系统的离散模

型,讨论了此系统在外激励频率变化的情况下的系统特性,且通过一个特定频率下的图分析了系统弱非线性项的影响. 研究表明弱非线性项可能对系统产生较大影响,研究结果为设计此类系统提供了理论依据.

参 考 文 献

- 1 Lamarque CH, Janin O. Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities; limitations to a modal superposition. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 235(4): 567~609
- 2 Sung CK, Yu WS. Dynamics of a harmonically excited impact damper; bifurcations and chaotic motion. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 317~329
- 3 Feng Q, He H. Modeling of the mean Poincaré map on a class of random impact oscillators. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2003; 22: 267~281
- 4 贺华,冯奇. 双层隔振系统建模. 第八届全国振动理论及应用学术会议论文集. 上海:同济大学出版社,2003. 11 (He Hua, Feng Qi. Modeling of Multi-stage isolation system. Proceedings of the 8th conference on vibration theory and application. Shanghai: Tongji University Press, 2003. 11(in Chinese))
- 5 Nayfeh AH. Problems in Perturbation, New York: Wiley, 1985

THE DISCRETE MODEL OF A TWO STAGE ISOLATION SYSTEM WITH RIGID LIMITERS*

He Hua¹ Feng Qi¹ Wang Yu²

(1. Key Laboratory of Solid Mechanics of the Ministry, Tongji University, Shanghai 200092, China)

(2. Naval Research Center, Beijing 100037, China)

Abstract This paper studied the nonlinear properties of a two stage isolation system with rigid limiters. A discrete model was derived based on the multi-body dynamics with unilateral contacts, and an approximate map was obtained after using the perturbation techniques. By using the above methods, we investigated how the two stage isolation system of a MTU diesel engine responded to external impact. The investigation shows that the system presents complicated nonlinear properties due to impact, and the weak nonlinear part, which could be omitted under no limiters case, may influence the property of the vibro-impact system greatly. Thus the conclusions offers a theoretical reference for designers.

Key words two stage isolation, vibro-impact, multi-point contact, map, bifurcation