

基于隐式微分/代数方程的多体系统动力学设计灵敏度分析方法

潘振宽 丁洁玉 王 钰

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

摘要 基于一般性的积分型目标函数、隐式相容初始条件及终止时刻表达式, 系统建立了含设计参数的用隐式微分/代数方程表达的多体系统动力学设计灵敏度分析的直接微分方法和伴随变量方法. 为降低目标函数及其对设计变量导数的计算复杂性, 将其积分形式的计算转化为微分形式. 所得到的结果可方便地应用于高效的间接最优化设计方法. 最后通过采用绝对坐标建模的平面两连杆机械臂模型对该方法进行了验证.

关键词 多体系统动力学, 微分/代数方程, 设计灵敏度分析, 直接微分方法, 伴随变量方法

引言

在采用收敛性好、计算效率高的最优化设计方法进行多体系统动力学最优设计时, 系统设计灵敏度分析是优化过程与传统多体动力学仿真的桥梁.

多体系统动力学设计灵敏度分析与最优设计的数学模型、多体系统动力学数学模型、系统初始条件的形式、优化终止时刻的确定等因素有关, 目前主要采用直接微分方法与伴随变量方法. Anderson^[1], Hsu^[2]针对链状多体系统建立了递推形式的多体系统动力学直接微分方法, 但未考虑目标函数、优化终止时间等因素; Bestle^[3,4]采用变分方法基于积分形式的目标函数、隐式初始条件和优化终止时间建立了一阶微分方程表达的多体系统动力学设计灵敏度分析伴随变量方法; Haug 等^[5]较早基于积分形式的目标函数、简化的初始条件和隐式优化终止时间表达推导了用一阶常微分方程和二阶微分/代数方程描述的多体系统动力学灵敏度分析的直接微分法和伴随变量法; Etman^[6]则基于简化的初始条件推导了二阶常微分方程和二阶微分/代数方程描述的多体系统动力学灵敏度分析的直接微分法和伴随变量法; Li^[7]和 Maly^[8]的研究工作基于通用的隐式微分/代数方程, 并推导了设计灵敏度分析的伴随变量方法, 其结果可很方便的推广到电路仿真、最优控制设计等领域, 但应用了显式的初始条件, 且未考虑优化过程终止时间条件.

本文的研究基于用隐式形式表达的通用的多体系统动力学微分/代数方程, 并使用隐式初始条件的优化过程终止时间条件, 系统建立了多体系统动力学设计灵敏度分析的直接微分方法和伴随变量方法. 其结果可直接应用于基于间接方法的多体系统动力学最优化设计.

1 问题描述

用隐式微分/代数方程表达的含设计参数的多体系统动力学方程为

$$F(\dot{x}, x, t, b) = 0 \quad (1)$$

其相容初始条件为

$$\Phi(x^1, t^1, b) = 0 \quad (2)$$

其中 t^1 固定, 为确定 x^1 , 必须满足 $\det \frac{d\Phi}{dx^1} \neq 0$.

系统终止时刻 t^2 由下式确定

$$\Omega(x^2, t^2, b) = 0 \quad (3)$$

其中 $x^2 \equiv x(t^2)$, $t^2 \equiv t^2(b)$. 式(3)必须满足

$$\det \frac{d\Omega}{dt^2} \neq 0.$$

多体系统最优化设计的积分型目标函数为

$$\Psi = G(x^2, t^2, b) + \int_{t^1}^{t^2} H(\dot{x}, x, t, b) dt \quad (4)$$

目标函数对设计变量 b 的导数为

$$\frac{d\Psi}{db} = (\dot{G} + H^2)t_b^2 + G_{x^2}x_b^2 + G_b +$$

2004-04-15 收到第1稿, 2004-04-28 收到修改稿.

国家重点自然科学基金资助项目(19902006).

$$\int_{t^1}^{t^2} (H_x \dot{x}_b + H_x x_b + H_b) dt \quad (5)$$

其中 $\dot{G} = \frac{dG}{dt} = G_x \dot{x}^2 + G_r^2$.

计算式(5)要求先计算 $t_b^2, x_b^2, \dot{x}_b^2, x_b, x_b$, 或通过引进伴随变量将以上不可计算的量消除. 以下分别通过直接微分方法和伴随变量方法实现.

2 直接微分方法

将式(1),(2),(3)分别对设计变量 b 求导得

$$F_x \dot{x}_b + F_x x_b + F_b = 0 \quad (6)$$

$$\Phi_{x^1} x_b^1 + \Phi_b = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\Omega} t_b^2 + \Omega_x x_b^2 + \Omega_b = 0 \quad (8)$$

其中 $\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt^2} = \Omega_x \dot{x}^2 + \Omega_r^2$.

由式(7),(8)可得

$$x_b^1 = -\Phi_x^{-1} \Phi_b \quad (9)$$

$$t_b^2 = -(\Omega_x / \dot{\Omega}) x_b^2 - \Omega_b / \dot{\Omega} \quad (10)$$

将式(10)代入式(5)得

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{db} = & [G_x^2 - (\dot{G} + H^2) \Omega_x / \dot{\Omega}] x_b^2 + \\ & [G_b - (\dot{G} + H^2) \Omega_b / \dot{\Omega}] + \\ & \int_{t^1}^{t^2} (H_x \dot{x}_b + H_x x_b + H_b) dt \end{aligned} \quad (11)$$

由式(6)和式(9)构成典型的矩阵常微分方程初值问题,可求得 x_b, \dot{x}_b ,代入式(11)可求得 $\frac{d\Psi}{db}$.

3 伴随变量方法

先将式(5) x_b 所在项进行分部积分得

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{db} = & (\dot{G} + H^2) t_b^2 + (G_x^2 + H_x^2) x_b^2 - H_x^1 x_b^1 + \\ & G_b + \int_{t^1}^{t^2} [(H_x - \frac{d}{dt} H_x) x_b + H_b] dt \end{aligned} \quad (12)$$

为消去式(12)中的 t_b^2, x_b^2, x_b^1, x_b , 引入伴随变量 λ , 将它们转置后左乘以式(6), 并将结果在 $[t^1, t^2]$ 上积分得

$$\int_{t^1}^{t^2} \lambda^T (F_x \dot{x}_b + F_x x_b + F_b) dt = 0 \quad (13)$$

将式(13)第1项分部积分得

$$\begin{aligned} & \lambda^2 T F_x^2 x_b^2 - \lambda^1 T F_x^1 x_b^1 + \\ & \int_{t^1}^{t^2} \{ [\lambda^T F_x - \frac{d}{dt} (\lambda^T F_x)] x_b + F_b \} dt = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

以下引进伴随变量 ξ, η , 将它们转置后分别左乘以式(7)和式(8)得

$$\xi^T \Phi_{x^1} x_b^1 + \xi^T \Phi_b = 0 \quad (15)$$

$$\eta^T \dot{\Omega} t_b^2 + \eta^T \Omega_x x_b^2 + \eta^T \Omega_b = 0 \quad (16)$$

将式(12)减去式(14),(15),(16)并不影响该表达式的值. 即

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{db} = & (\dot{G} + H^2 + \eta^T \dot{\Omega}) t_b^2 + (G_x^2 + \\ & H_x^2 - \eta^T \Omega_x - \lambda^2 T F_x^2) x_b^2 - (H_x^1 + \\ & \xi^T \Phi_{x^1} - \lambda^1 T F_x^1) x_b^1 + (G_b - \xi^T \Phi_b - \eta^T \Omega_b) + \\ & \int_{t^1}^{t^2} \{ [H_x - \frac{d}{dt} H_x - \lambda^T F_x + \\ & \frac{d}{dt} (\lambda^T F_x)] x_b + H_b - \lambda^T F_b \} dt \end{aligned} \quad (17)$$

由于伴随变量任意取值, 可以选取各伴随变量使得 t_b^2, x_b^2, x_b^1, x_b 的系数都为零, 从而得

$$\dot{\Omega} \eta = \dot{G} + H^2 \quad (18a)$$

$$F_x^2 T \lambda^2 = G_x^2 + H_x^2 - \Omega_x^T \eta \quad (18b)$$

$$\Phi_x^T \xi = F_x^1 T \lambda^1 - H_x^1 T \quad (18c)$$

$$F_x \lambda + \left(\frac{d}{dt} F_x^T - F_x^T \right) \lambda = \frac{d}{dt} H_x^T - H_x^T \quad (18d)$$

目标函数的导数可以简化为

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{db} = & G_b - \xi^T \Phi_b - \eta^T \Omega_b + \\ & \int_{t^1}^{t^2} (H_b - \lambda^T F_b) dt \end{aligned} \quad (19)$$

由式(18)可求得 η, λ, ξ , 代入式(19)可求得 $\frac{d\Psi}{db}$.

4 目标函数及其导数计算简化

针对(4)式构造

$$\Psi(t) = G + \int_{t^1}^t H ds \quad (20)$$

当 $t = t^1$ 时,

$$\Psi(t^1) = G \quad (21)$$

将式(20)对 t 求导得

$$\frac{d\Psi}{dt} = H \quad (22)$$

式(21)与式(22)构成一个单变量一阶常微分方程, 且

$$\Psi(b) = \Psi(t^2) = G + \int_{t^1}^{t^2} H ds \quad (23)$$

同理, 对式(19), 可转化为求解如下—阶常微分方程的初值问题

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{db}(t) = & G_b - \xi^T \Phi_b - \eta^T \Omega_b + \int_{t^1}^t (H_b - \lambda^T F_b) ds \\ \frac{d}{db} \left(\frac{d\Psi}{db} \right) = & H_b - \lambda^T F_b \\ \frac{d\Psi}{db}(t^1) = & G_b - \xi^T \Phi_b - \eta^T \Omega_b \end{aligned} \quad (24)$$

则 $\frac{d\Psi}{db}(t^2)$ 即为目标函数对设计变量的导数.

5 数值算例

图 1 为一平面两连杆机械臂模型, 两臂为匀质刚性杆, 其长度、质量分别为 l_1, l_2, m_1, m_2 . 采用绝对坐标建模, 系统的状态变量为 $q = [x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2]^T$, 设计变量为 $b = [l_1, l_2, m_1, m_2]^T$, 系统动力学方程为微分/代数方程, 给定性能函数

$$\Psi = \int_{t^1}^{t^2} [(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)^2] dt$$

当 $b = [1, \sqrt{3}, 1, 2]^T$ 时, $t^1 = 0, t^2 = 4.4$ 时, 由本文方法可得机械臂末端点的运动轨迹如图 2 所示, 状

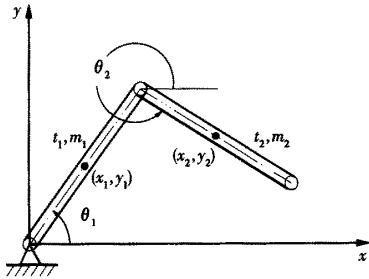


图 1 平面两连杆机械臂模型
Fig. 1 A planar manipulator with two links

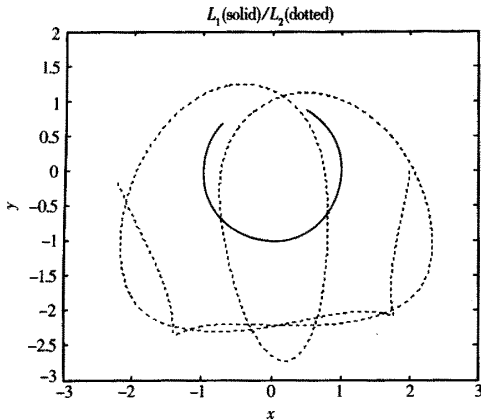


图 2 两臂末端点运动轨迹
Fig. 2 Tip tracks of the arms

态变量的设计灵敏度如图 3 和图 4 所示, 性能函数为 $\Psi = 17.2747$, 相应设计灵敏度为 $\frac{d\Psi}{db} = [17.2184, 11.2866, 0.4683, -0.2361]$.

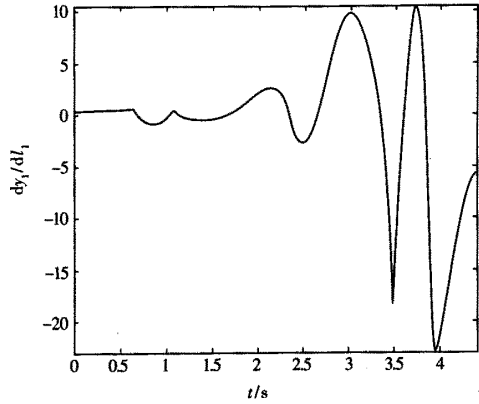


图 3 y_1 对 l_1 的导数
Fig. 3 The derivative of y_1 with respect to l_1

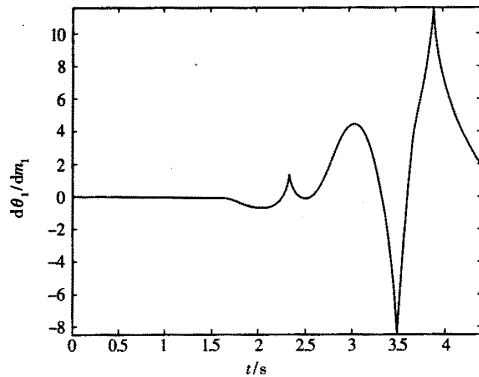


图 4 θ_1 对 m_1 的导数
Fig. 4 The derivative of θ_1 with respect to m_1

6 总结

本文针对隐式形式表达的通用的多体系统动力学微分/代数方程和标准的目标函数, 推导出了适用一般多体系统动力学设计灵敏度的直接微分方法和伴随变量方法计算公式. 为计算方便, 本文将求解积分形式的目标函数设计灵敏度问题转化为一般常微分方程初值问题, 具有通用性. 因为某些高效的优化方法需要目标及约束函数对设计变量的二阶导数, 因此, 多体系统动力学的二阶设计灵敏度分析将是本文后继的工作.

参 考 文 献

- 1 Anderson KS, Hsu YH. Analytical full-recursive sensitivity analysis for multibody chain systems. *Multibody Systems Dynamics*, 2002, 8(1):1~27
- 2 Hsu YH, Anderson KS. Recursive sensitivity analysis for Constrained multi-rigid-body dynamic systems design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24(4): 312~324
- 3 Bestle D. Analyse und Optimierung Von Mehrkörpersystemen. Berlin: Springer, 1994
- 4 Bestle D, Eberhard P. Analyzing and optimizing multibody systems. *Mechanics of Structures & Machines*, 1992, 20(1):67~92
- 5 Haug EJ, Mani NK, Krishnasawami P. Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamically Driven Systems, in: Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1984:555~636
- 6 Etman L F P. Optimization of Multibody Systems Using Approximation Concepts. [Ph D Thesis]. Eindhoven: Technische Universiteit, 1997
- 7 Li S, Petzold L. Software and algorithms for sensitivity analysis of large-scale differential-algebraic systems. *Journal of Comp And App Math*, 2000, 13:131~145
- 8 Maly T, Petzold LR. Numerical methods and software for sensitivity analysis of differential-algebraic systems. *Applied Numerical Mathematics*, 1997, 20: 57~59

DESIGN SENSITIVITY ANALYSIS OF MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS DESCRIBED BY IMPLICIT DIFFERENTIAL/ALGEBRAIC EQUATIONS

Pan Zhenkuan Ding Jieyu Wang Yu

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract The direct differentiation method and adjoint variable method for dynamics of multibody systems were presented, based on the generic formulation of implicit differential/algebraic equations with implicit initial conditions and generic end time conditions. The computation of the objective functions and their derivatives were another contributions of this paper, which transformed the integral type of objective functions to integration ones in order to improve computational efficiency. Finally the method was verified by a numerical example of a planar manipulator with two links.

Key words dynamics of multibody systems, implicit differential/algebraic equations, design sensitivity analysis, direct differentiation method, adjoint variable method