

离散奇异内积法分析材料非线性柱的动力响应

刘铸永

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200030)

摘要 引入离散奇异内积法分析材料非线性圆柱的动力响应. 离散奇异内积方法是一种结合全局方法的高精度和局域方法的稳定性的计算方法. 数值分析过程中用离散奇异内积方法离散空间导数, 用四阶 Runge-Kutta 法离散时间导数. 计算结果表明, 离散奇异内积格式的求解结果和 LP 法的求解结果非常吻合. 说明离散奇异内积格式非常适合数值分析材料非线性圆柱的动力响应问题, 并且是一种具有很高的精度, 和可靠性的高效的算法.

关键词 离散奇异内积, 小波分析, 动力响应, 材料非线性, Runge-Kutta 法

引言

弹性结构的动力响应问题一直受到人们的极大关注. 在结构动力响应的工程问题中, 例如, 桥梁、导轨及航天工程和机械工程中, 梁、柱、板和壳受简谐载荷作用的动力响应是一个很重要的研究方向. Ariarantnam 和 Xie 利用解析、数值和实验方法研究了参数激励作用下屈曲柱的混沌动力学^[1]. Restuccio 等利用过多尺度法研究了具有惯性和几何非线性的不可伸长的柔性梁在弯-扭耦合时的非线性响应^[2]. Svensson 利用实验、数值和解析方法研究了具有横向约束的柔性梁的动力学^[3]. Kreider 和 Nayfeh 使用实验方法研究了两端固定支撑的柔性梁在横向激励作用下的单模态非线性动力学. Lacarbonara 等使用单模态 Galerkin 离散化方法和直接方法分析了柔性梁的横向振动^[4]. Martin 等人研究了参数和强迫激励的联合作用下变形薄板的非线性动力学^[5]. Yu 和 Zhang 利用 Maple 程序研究了二自由度薄板的非线性动力学^[6].

结构的动力学响应问题一般由非线性偏微分方程来描述, 求非线性偏微分方程的解析解和数值解在非线性动力学中占有重要的地位. 在过去几十年中, 全局方法和局域方法在求解非线性动力学问题中都取得了一定的成功. 例如, 用格子 Boltzmann 方法模拟 MKdV 方程, 用 Jacobi 椭圆函数展开法求解非线性波动方程, 用双曲函数法求一些非线性方程的孤波解等. 全局方法能够达到很好的精度, 但是局

域方法有着更好的稳定性. 因此, 在科学和工程应用中, 我们需要一种结合全局方法的高精度和局域方法的稳定性的计算方法. 以小波理论和广义函数理论为数学基础的离散奇异内积 (discrete singular convolution) 算法^[7~14]恰恰的做到了这一点. 它利用 delta 型奇异核, 可以构造偏微分方程的数值解法. DSC 方法通过选择适当的参数, 达到了可以控制的整体精度和良好的稳定性. Wei 在文^[11]中证明了小波可以由 DSC (离散奇异内积) 核生成. 所以我们可以称由 DSC 核生成的小波为 DSC 小波.

为了验证离散奇异内积方法求解弹性结构的非线性动力学响应问题的有效性, 本文研究了材料非线性柱的强迫激励振动, 利用离散奇异内积方法进行了动力响应计算, 并用摄动解进行了数值比较.

1 材料非线性柱的基本方程

圆柱是工程中常见的结构之一. 下面考虑一端固定, 一端受周期激励的非线性弹性圆柱体. 运动方程给出如下

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x)\sigma] \quad (1)$$

其中 $\rho(x)$ 表示圆柱体的密度, $A(x)$ 表示横截面积. 这儿考虑等截面均匀的圆柱体, 有 $\rho(x) = \rho$ (常数), $A(x) = A$ (常数), 则上式两边可以消 $A(x)$, 可得

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (2)$$

考虑二次非线性材料本构方程

$$\sigma = E(\epsilon + E_1\epsilon^2) \quad (3)$$

几何方程

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

把式(3),式(4)带入式(2),可得

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = E \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \quad (5)$$

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 + 2E_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

为了便于表示对式(5)无量纲化,令

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{u} = \frac{u}{l}, \bar{t} = \sqrt{\frac{E}{l\rho}} t \quad (6)$$

则式(5)变为

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + 2E_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \quad (7)$$

为了便于表示,在不发生混淆的情况下可以令上式中的 $\bar{x}=x, \bar{u}=u, \bar{t}=t$, 上式变成

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2E_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

这就是考虑二次物理非线性圆柱体运动方程的一般形式. 对于一端固定一端受周期强迫激励的边界条件, 方程给出如下

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \epsilon \rho \cos \omega t \quad (9)$$

2 离散奇异内积理论和算法

离散奇异内积(DSC)格式作为 Hilbert 变换、Abel 变换、随机变换和 delta 变换的一种数值实现方法, 首先是由 Wei 提出的. 这些变换在很多实际应用领域, 例如计算电磁学、计算拓扑学和动力激励中, 都起到了非常重要的作用. 通过构造或者逼近适当的奇异核, DSC 能够作为一种非常有效、精确和可靠的计算格式在实际中应用. 下面先介绍 DSC 的理论.

为了便于表示, 我们将用广义函数的理论来讨论奇异内积(singular convolution). 令 T 为一个广义函数, $\eta(t)$ 是一个检验函数空间单元, 一个奇异内积可以表示为

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t-x)\eta(x)dx \quad (10)$$

这儿 $T(t-x)$ 是一个奇异核. 取决于核 T 的不同形式, 奇异内积是很多科学问题和工程问题的难题. 例如, Hilbert 型奇异核有一个统一形式如下

$$T(x) = \frac{1}{x^n}, (n > 0) \quad (11)$$

另一种非常有用的奇异核是 delta 型奇异核

$$T(x) = \delta^{(n)}(x), (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

核 $T(x) = \delta(x)$ 一般应用于曲面和曲线的内插法, 而 $T(x) = \delta^{(n)}(x), (n=1, 2, \dots)$ 在数值求解微分方程起到了非常重要的作用. 然而, 这类核的一个共同特征就是它们是奇异的, 也就是说, 他们不能直接用计算机进行数值计算. 在数值计算上, 式(10)这类奇异内积并没有很大的优点. 为了避免在计算机中直接使用奇异表达式, 广义函数 T 的逼近函数 $T_\alpha(x)$ 可以构造为

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x) \rightarrow T(x) \quad (13)$$

这儿 α_0 是一个极限点. 很明显, 当 $T(x) = \delta(x)$ 时, $T_\alpha(x)$ 是一个 delta 序列. 它的离散形式可以表示如下

$$F_\alpha(t) = \sum_k T_\alpha(t-x_k) f(x_k) \quad (14)$$

这儿 F_α 是 $F(t)$ 的近似函数, $\{x_k\}$ 是离散内积(14)定义在其上的一系列离散点. 这种离散表达式使应用计算机求解成为可能. 要注意的是这儿原始的测试函数 $\eta(t)$ 已经被 $f(x)$ 所替代. 函数 $f(x)$ 的数学特征或者说要满足的特征是用近似核 $T_\alpha(x)$ 决定的. 一般来说, 内积要求它 Lebesgue 可积.

一个非常简单的例子是 Shannon 核

$$\delta_\alpha(x) = \sin(\alpha x) / \pi x \quad (15)$$

Shannon 核是一个 delta 序列, 它能够提供一个 delta 广义函数的近似函数.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}, \eta(x) \rangle = \eta(0) \quad (16)$$

对 delta 型序列, 用 Nyquist 采样频率, $\alpha = \pi/\Delta$, 插值(或者拟插值)格式比非插值离散法有更多的优点. 因此, Shannon 核可以离散为

$$\delta_{\alpha,k}(x) = \frac{\sin[\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)]}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)} \quad (17)$$

事实上, 插值(或者拟插值)方法不但在网格点上能够自然满足高精度, 它还在网格上提供了最大可能的计算效率. 这是因为由 $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ 给定的 Nyquist 取样间隔是最大的取样间隔, 只要所研究的 L^2 函数 $f(x)$ 满足 Nyquist 条件

$$\text{sup } \hat{f}(k) \subset \left\{ -\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta} \right\} \quad (18)$$

这完全可以由 Shannon 采样定理得出

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\pi(x-x_k)/\Delta]}{\pi(x-x_k)/\Delta} f(x_k) \quad (19)$$

Shannon 采样定理的显著特点在于通过一组有限的离散数据,重构一个有限带宽的 L^2 函数. 这些有限带宽的 L^2 函数可以作为 Hilbert 空间的 Paley-Wiener 重构核. 离散的 Shannon 核, $\{\sin[\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)]/\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)\}_{k \in Z}$, 是一组完整的样本基. 由于 Shannon 核的 Fourier 变换是一个信号带宽为 $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ 理想的低通滤波器, Shannon 采样定理在信息理论, 信号和图像处理中得到了广泛的应用.

Shannon 核(图 1 所示)的傅里叶变换函数是特征函数 $\chi_{[-\alpha, \alpha]}$, 它是一个不连续的函数(图 2 所示). 因此 Shannon 核及其离散形式在欧氏空间上没有明显的局域特性. 为了改善它们的局域化和渐进化特性, 人们使用了不少方法. 其中一个就是“加密抽样”, 使函数 $f(x)$ 能够被衰减较快的函数的叠加.

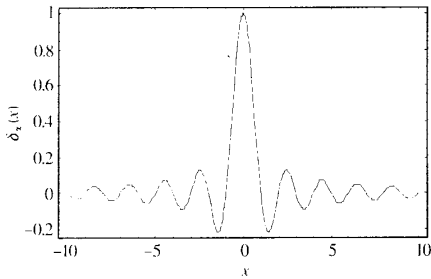


图 1 Shannon 核($\alpha=\pi$)
Fig. 1 Shannon kernel ($\alpha=\pi$)

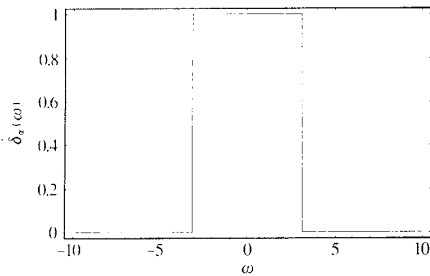


图 2 Shannon 核的傅里叶变换函数($\alpha=\pi$)
Fig. 2 Fourier transform function of Shannon kernel ($\alpha=\pi$)

仍假定函数 $f(x)$ 是有限频段的, 即 $\text{supp } \hat{f} \subset [-\alpha, \alpha]$. 设 $\lambda > 0$, 现在取样间隔小到 $\Delta = \pi/[a(1+\lambda)]$, 定义函数 g_λ 为

$$\hat{g}_\lambda(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \alpha \\ 1 - \frac{|\omega| - \alpha}{\lambda\alpha}, & \alpha \leq |\omega| \leq (1+\lambda)\alpha \\ 0, & |\omega| \geq (1+\lambda)\alpha \end{cases} \quad (20)$$

如图 4 所示. 这样, 函数 $f(x)$ 可以重构

$$f(x) = \sum_k f(x_k) G_\lambda(x - x_k) \quad (21)$$

其中

$$G_\lambda(x) = \frac{2\pi}{2\alpha(1+\lambda)} g_\lambda(x) = \frac{2\sin[x\alpha(1+\lambda/2)]\sin(x\alpha\lambda/2)}{\lambda\alpha^2(1+\lambda)x^2} \quad (22)$$

由图 3 可以看出, $G_\lambda(x)$ 比 $\frac{\sin(ax)}{ax}$ 衰减快. 并且, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $G_\lambda(x) \rightarrow \frac{\sin(ax)}{ax}$. 上面选取的 $\hat{g}_\lambda(\omega)$ 只是连续的, 并不光滑, 在进行微分算子运算时, 将不再连续, 因此 $G_\lambda(x)$ 再坐标空间的局域特性没有得到根本改善.

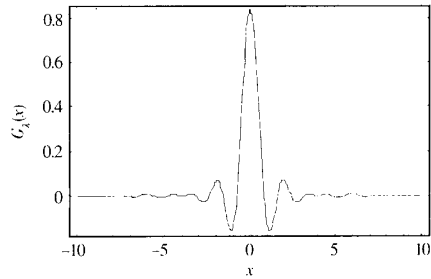


图 3 “加密抽样”尺度函数
 $G_\lambda(x)$ ($\alpha=\pi, \lambda=0.5$)
Fig. 3 Refined sampling function
 $G_\lambda(x)$ ($\alpha=\pi, \lambda=0.5$)

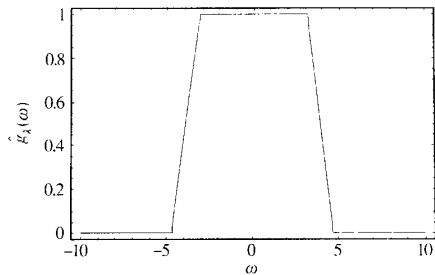


图 4 “加密抽样”尺度函数的傅里叶变换函数
 $\hat{g}_\lambda(\omega)$ ($\alpha=\pi, \lambda=0.5$)

Fig. 4 Fourier transform function of the refined function
 $\hat{g}_\lambda(\omega)$ ($\alpha=\pi, \lambda=0.5$)

在文[7]中, Wei 等人建议对正交规范化尺度数

$\delta_\alpha(x)$ 和样本尺度函数 $\delta_{\alpha,\sigma}(x)$ 进行正则化处理.即引进一个正则因子 $R_\sigma(x)$ 对 $\hat{\delta}(\omega)$ 做正则化运算.正则化后的尺度函数(图5所示)定义如下

$$\delta_{\alpha,\sigma}(x) = \delta_\alpha(x)R_\sigma(x) \quad (23)$$

正则化处理后的 $\hat{\delta}_\alpha(\omega)$ 是光滑连续的函数(图6所示),因而 $\delta_{\alpha,\sigma}(x)$ 在欧氏坐标空间上有良好的局域特性.正则因子 $R_\sigma(x)$ (有时称为权函数或过滤因子)必须满足下面两个条件

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} R_\sigma(x) \rightarrow 1 \quad (24)$$

和

$$\int \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \delta_\alpha R_\sigma(x) dx = R_\sigma(0) = 1 \quad (25)$$

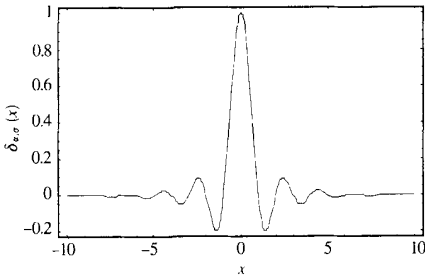


图5 正则化 Shannon 核($\alpha=\pi, \sigma=3.2\Delta$)
Fig.5 Regularized Shannon kernel
($\alpha=\pi, \sigma=3.2\Delta$)

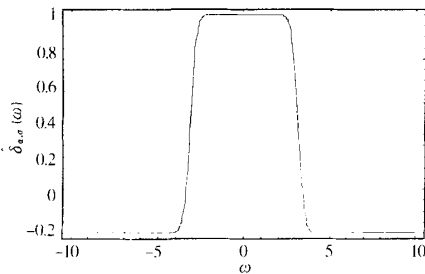


图6 正则化 Shannon 小波尺度函数的
傅里叶变换函数($\alpha=\pi, \sigma=3.2\Delta$)

Fig.6 Fourier transform function of the regularized
Shannon kernel ($\alpha=\pi, \sigma=3.2\Delta$)

一个典型的 delta 正则因子是 Gauss 正则因子

$$R_\sigma(x) = \exp[-x^2/(2\sigma^2)] \quad (26)$$

其中 σ 是宽度参数, $\sigma > 0$. 容易验证, Gauss 正则因子满足式(22)和式(23)的要求. 这样, Shannon 核可以被正则化为

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x) = \frac{\sin(\pi x/\Delta)}{\pi x/\Delta} \exp[-x^2/(2\sigma^2)] \quad (27)$$

但是, Gauss 正则化的样本尺度函数不再是精确的正交规范化小波尺度函数,因为它不再满足正交规范化尺度函数的条件,即

$$\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (28)$$

这儿 $\hat{\phi}$ 表示 ϕ 的傅里叶变换函数,也就是特征函数

$$\hat{\phi}(\omega) = \chi_{[-1/2, 1/2]} \quad (29)$$

$$\hat{\delta}_{\Delta,\sigma}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\Delta,\sigma}(x) dx = \text{erfc}\left(\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\Delta}\right) = 1 - \text{erfc}\left(\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\Delta}\right) \quad (30)$$

这儿误差函数

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (31)$$

在式(28)中, erfc 表示余差函数. 对于一个给定的 $\sigma > 0$, $\text{erfc}[\pi\sigma/(\sqrt{2}\Delta)]$ 将永远为正值,除非 $\sigma \rightarrow \infty$, 否则 $\hat{\delta}_{\Delta,\sigma}(0)$ 永远小于 1. 在实际计算中取 $\sigma = r\Delta$ (r 是任意参数), 则 $r = \sigma/\Delta \geq \sqrt{2}/\pi$ 时, 误差余函数 $\text{erfc}[\pi\sigma/(\sqrt{2}\Delta)]$ 很快趋近于 0^[13].

正则化后的 Shannon 核比 Shannon 核有更好的局域特性,因此它更适合非线性偏微分方程数值求解. 这样, $f(x)$ 可进一步重构为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) f(x_k) \quad (32)$$

上式的求和运算是定义在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的,这在实际计算中是做不到的. 因此,为了计算的需要,有必要把计算域定义在有限区间. 由于我们已经引进 Gauss 正则因子,它具有很好的快速衰减特性,即局域特性. 所以在实际计算中我们只需要在网格点 x_k 附近取 $2W$ 个计算点就可以达到计算精度. 这样 (32) 式可以进一步改写成^[13]

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x-x_k) f(x_k) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (33)$$

这儿,上标 (n) 表示对空间坐标 x 的 n 阶导数. $2W+1$ 是计算带宽,它一般远远小于整个计算域 $[a, b]$. 在(33)式中,如果 Δ 和 σ 给定,在整个计算域中只有一个核出现,这对数值计算来说是十分经济和有利的. (33)式可以被称为离散奇异内积数值离散格式.

Qian 和 Wei 在文[9]中给出了选择参数 W, σ, Δ 的估计方法. 举例说,如果把一个 L^2 函数 $f(x)$ 的 L^2 误差设定为 $10^{-\eta}$ ($\eta > 0$),则需要满足以下关系式

$$r(\pi - B\Delta) > \sqrt{4.617} \quad (34)$$

$$\frac{W}{r} > \sqrt{4.617} \quad (35)$$

当单元网格划分后, 参数 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}$ 可以一次性计算出来, 然后把它们保存起来供计算调用, 不需要重复计算, 这对节省计算是非常有利的。

为了应用方便, 这儿先给出 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x-x_k)$ 的一阶和二阶表达式^[7,8]

$$\delta_{\Delta,\sigma}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{x} - \frac{\sin(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{\pi x^2/\Delta} - \frac{\sin(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{\pi\sigma^2/\Delta}, & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (36)$$

$$\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\pi/\Delta\sin(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{x} - \frac{2\cos(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)/2\sigma^2}{x^2} - \frac{2\cos(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{\sigma^2} + \frac{2\sin(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{\pi x^3/\Delta} \times \frac{\sin(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{\pi\sigma^2 x/\Delta} + \frac{x\sin(\pi x/\Delta)\exp(-x^2/2\sigma^2)}{\pi\sigma^4/\Delta}, & (x \neq 0) \\ -\frac{3 + \pi^2\sigma^2/\Delta^2}{3\sigma^2} & (x = 0) \end{cases} \quad (37)$$

3 控制方程的离散

将空间坐标 x 均匀等分, 单元网格大小记为 $\Delta x = (b-a)/N$, N 是划分区间 $[a, b]$ 所采用的单元网格总数. 网格点坐标记为 $x_j = a + (j-1)\Delta x$ ($j=1, 2, \dots, N+1$), 于是有 $x_j - x_{j+k} = -k\Delta x$. 在网格点 x_j 的 u 的值记为 u_j , 式(8) 可以写成

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} = v_j \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} (1 + 2E_1 \frac{\partial u_j}{\partial x}) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (38)$$

令

$$\begin{aligned} \{y_j\} &= \{y_1, y_2, \dots, y_{2N+2}\} = \\ \{u_1, u_2, \dots, u_{N+1}, v_1, v_2, \dots, v_{N+1}\} \\ (j &= 1, 2, \dots, 2N + 2) \end{aligned} \quad (39)$$

则有

$$f_j = \begin{cases} y_{j+N+1} & (j = 1, 2, \dots, N + 1) \\ \frac{\partial^2 y_{j-N-1}}{\partial x^2} (1 + 2E_1 \frac{\partial y_{j-N-1}}{\partial x}), & (j = N + 2, N + 2, \dots, 2N + 2) \end{cases} \quad (40)$$

于是式(8)可以改写为一个半离散的方程组

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} = f_j \quad (j = 1, 2, \dots, 2N + 2) \quad (41)$$

求解式(13), 可采用四阶 Runge-Kutta 方法, 其离散格式为

$$y_j^{n+1} = y_j^n + \frac{\Delta t}{6} (K_{j,1} + 2K_{j,2} + 2K_{j,3} + K_{j,4}) \quad (j = 1, 2, \dots, 2N + 2) \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{j,1} &= f_{j,1}^n, K_{j,2} = f_{j,2}^n, K_{j,3} = f_{j,3}^n, \\ K_{j,4} &= f_{j,4}^n \quad (j = 1, 2, \dots, 2N + 2) \end{aligned} \quad (43)$$

上标 n 表示时间层, Δt 是时步长, $t = n\Delta t$. 利用前面给出的离散奇异内积数值离散格式

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x-x_k) f(x_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (44)$$

来离散空间导数, 可求得, 当 $j=1, 2, \dots, N+1$ 时

$$K_{j,1} = f_{j,1}^n = y_{j+N+1}^n \quad (45)$$

$$K_{j,2} = f_{j,2}^n = y_{j+N+1}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,1} \quad (46)$$

$$K_{j,3} = f_{j,3}^n = y_{j+N+1}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,2} \quad (47)$$

$$K_{j,4} = f_{j,4}^n = y_{j+N+1}^n + \Delta t K_{j,3} \quad (48)$$

当 $j=N+2, N+3, \dots, 2N+2$ 时

$$K_{j,1} = f_{j,1}^n =$$

$$\sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(-k\Delta x) y_{j+k-N-1}^n \times [1 + 2E_1 \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)}(-k\Delta x) y_{j+k-N-1}^n] \quad (49)$$

$$\begin{aligned} K_{j,2} &= f_{j,2}^n = \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(-k\Delta x) \times \\ & (y_{j+k-N-1}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,1}) \times \\ & [1 + 2E_1 \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)}(-k\Delta x) (y_{j+k-N-1}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,1})] \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} K_{j,3} &= f_{j,3}^n = \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(-k\Delta x) \times \\ & (y_{j+k-N-1}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,2}) \times \\ & [1 + 2E_1 \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta,\sigma}^{(1)}(-k\Delta x) \times \end{aligned}$$

$$(y_{j+k-N-1}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,2}) \quad (51)$$

$$K_{j,4} = f_{j,4} = \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(-k\Delta x) \times (y_{j+k-N-1}^n + \Delta K_{j,3}) \times [1 + 2E_1 \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(-k\Delta x) \times (y_{j+k-N-1}^n + \Delta t K_{j,3})] \quad (52)$$

4 计算结果和结论

Nayfeh 给出远离共振时式(8)在边界条件式(9)时的摄动解^[15]

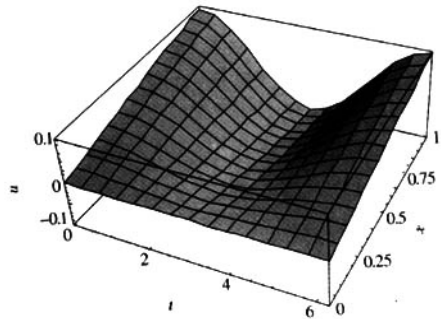


图7 t在区间[0,1]上的摄动解
Fig.7 Result of perturbation method in time[0,1]

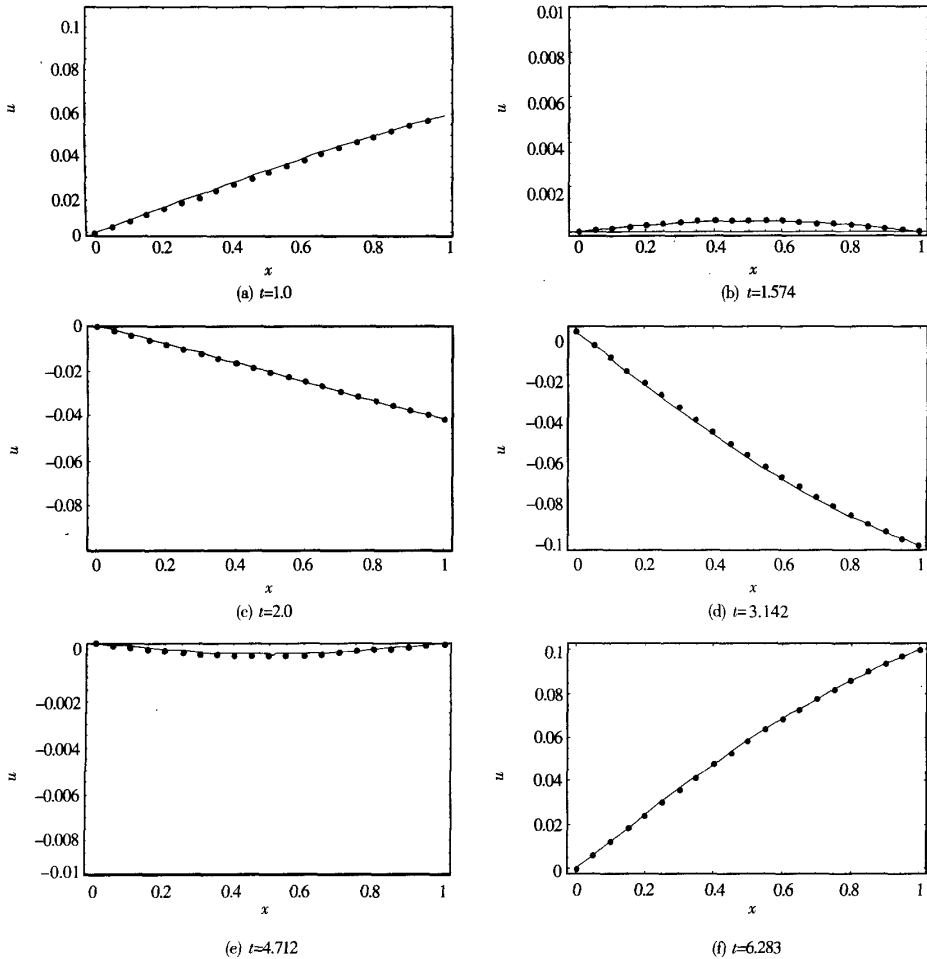


图8 DSC解与摄动解结果比较
Fig.8 Result comparisons between DSC and perturbation methods

$$u = \epsilon u_1(x, t) + \epsilon^2 u_2(x, t) + \dots \quad (53)$$

$$u_1 = \frac{p \cos \omega t \sin \alpha x}{\sin \omega} \quad (54)$$

其中

$$u_2 = \frac{E_1 p^2 \omega^2}{\delta \sin^2 \omega} \left[\frac{1}{\omega} (x \sin 2\omega - \sin 2\omega x) - x(x \cos 2\omega x - \frac{\cos 2\omega \sin 2\omega x}{\sin 2\omega}) \cos 2\omega t \right] \quad (55)$$

为了便于和摄动解比较,在利用拟小波数值离散格式求解时取初始条件

$$u(x, 0) = \epsilon u_1(x, 0) + \epsilon^2 u_2(x, 0) \quad (56)$$

取 $\epsilon = 0.1$, $[a, b] = [0, 1]$, $\omega = 1.0$, $p = 1.0$, $W = 15$, $N = 100$, $\sigma = 3.2$, $\Delta t = 0.001$. 计算过程如下:(a)利用给定的初值 $y_j^0 (j=1, 2, \dots, 2N+2)$ 或上一个时间层 $y_j^1 (j=1, 2, \dots, 2N+2)$, 利用边界条件对计算域外的点进行延拓。(b)利用式(45)~式(52)可求得 $f_{j,1}^n, f_{j,2}^n, f_{j,3}^n, f_{j,4}^n$ 的值。(c)利用式(42)计算 $y_j^{n+1} (j=1, 2, \dots, 2N+2)$ 。(d)重复上面过程,把时间推进到下一个时间层 $t = t + \Delta t$, 直到达到所需要的时间层为止。

图 7 为摄动法求得的 t, x 都在区间 $[0, 1]$ 时的解, 图 8 为 DSC(离散奇异内积)解与摄动解的比较结果, 实线表示摄动解, 点表示 DSC 解。

由图 8 可以看出离散奇异内积离散格式的求解结果和摄动法求得的摄动解几乎完全重合。一般的数值方法, 如差分法, 当网格划分到一定程度时候, 精度无法再提高。而离散奇异内积方法可以通过调整控制参数 W 来进一步提高分辨率, 从而使精度可以得到提高。由于本文研究的问题没有解析解, 摄动解只是一种近似解析解, 因此只是通过求解结果的图形比较来体现离散奇异内积方法的准确性, 而没有进行详细的误差分析来说明该方法的高精度。但是作者在应用该方法研究别的有解析解的问题中, 这一点得到了充分的体现。图 8 的数值比较结果说明离散奇异内积方法作为一种数值离散方法, 能够很好的反映函数的局域变换特性, 具有可控制的整体精度、很好的效率和可靠的稳定性, 非常适合分析材料非线性结构的动力学响应问题。

参 考 文 献

1 Ariaratnam ST, Xie WC. Chaotic motion under parametric excitation. *Dynamics and Stability of*

Systems, 1989, 4: 111~130

- 2 Restuccio JM, Krousgrill CM, Bajaj AK. Nonlinear nonplanar dynamics of a parametrically excited inextensional elastic beam. *Nonlinear Dynamics*, 1991, 2: 263~289
- 3 Svensson I. Dynamic buckling of a beam with transverse constraints. *Nonlinear Dynamics*, 1996, 11: 315~328
- 4 Lacarbonara W, Nayfeh AH, Kreider W. Experimental validation of reduction methods for nonlinear vibrations of distributed-parameter system: analysis of a buckled beam. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 17: 95~117
- 5 Martin JR, PerKins NC, Vorus WS. Nonlinear response of predeformed plate subject to harmonic in-plane edge loading. *J Sound and Vibration*, 1994, 176(4): 515~529
- 6 Yu P, Zhang W, Bi Q. Vibration analysis on a thin plate with the aid of computation of normal forms. *Int J Non-Linear Mech*, 2001, 36: 597~627
- 7 Wei GW. Discrete singular convolution for Fokker-Plank equation. *J Chem Phys*, 1999, 110(18): 8930~8942
- 8 Wan Decheng, Wei GW. The study of quasi wavelet based numerical method applied to Burgers' equation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(10): 1099~1110
- 9 Qian S, Weiss J. Wavelet and the numerical solution of partial differential equations. *J Comput Phys*, 1993, 106(1): 155~175
- 10 Wei GW. Discrete singular convolution for the solution of the Fokker-Plank equation. *Journal of Chemical Physics*, 1999, 110: 8930~8942
- 11 Wei GW. Wavelets generated by the singular convolution kernels. *Journal of Physics A*, 2000, 33: 8577~8596
- 12 Wei GW. A new algorithm for solving some mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 2017~2030
- 13 Wei GW, Zhao YB, Xiang Y. Discrete singular convolution and its application to analysis of plates with internal support. Part 1: Theory and algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55: 913~946
- 14 Wei GW, Zhao YB, Xiang Y. Discrete singular convolution and its application to analysis of plates with internal support. Part 2: Applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55: 947~971
- 15 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*, New York: John Wiley & Sons, 1979

DISCRETE SINGULAR CONVOLUTION FOR THE DYNAMIC RESPONSES OF MATERIALLY NONLINEAR POLE

Liu Zhuyong

(School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The discrete singular convolution(DSC) was introduced for analyzing the dynamical responses of materially nonlinear pole. The discrete singular convolution (DSC) is a new numerical method, which has not only the high accuracy of global methods but also the flexibility of local methods. The discrete singular convolution (DSC) algorithm was adopted to discretize the spatial derivatives, while the fourth-order Runge-Kutta method was adopted to discretize the temporal derivatives. The DSC results were very consistent with the solutions obtained by the perturbation method. It indicates that the discrete singular convolution is a very efficient, robust numerical method with high accuracy for solving the responses of materially nonlinear structures.

Key words discrete singular convolution, wavelets analysis, dynamical responses, materially nonlinear, Runge-Kutta method