

轴向运动梁横向非线性振动研究

陈树辉¹ 黄建亮¹ 余锦炎²

(1. 中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

(2. 香港大学机械工程系, 香港)

摘要 应用增量谐波平衡法(IHB法)研究轴向运动梁横向非线性振动的内部共振. 根据哈密顿原理建立非惯性参考系下轴向运动梁的横向振动微分方程, 采用分离变量法分离时间变量和空间变量并利用 Galerkin 方法离散运动方程, 再应用 IHB 法进行非线性振动分析, 研究了在固有频率之比 ω_{20}/ω_{10} 接近于 3:1 情况下, 外激励频率 ω 在 ω_{10}, ω_{20} 附近的具有内部共振的基谐波和次谐波响应. 数值结果表明了 IHB 法是一个求解轴向运动体系非线性振动的非常有效的半解析、半数值的方法.

关键词 轴向运动梁, 非线性振动, 增量谐波平衡(IHB)法, 内部共振

引言

自然界和工程技术中, 轴向运动体系的非线性振动十分普遍, 它广泛存在于军事、航空航天、土木、机械、电子等工程中. 具有高速轴向运动的磁带、缆绳、动力传输带、锯片等等的横向振动, 都是轴向运动体系非线性振动的典型例子.

国际上对轴向运动体系非线性振动的研究, 多数集中在模态分析和计算方法上, Wickert 等^[1]全面评论了直至 1988 年以前的研究工作. Pellicano 等^[2]对 2000 年以前的研究工作也作了很好的综述. 其中主要的有 Wickert^[3]利用 KBM 方法研究运动梁的非线性振动及其分叉, Riedel 等^[4]利用多尺度法研究了轴向运动体系的内部共振. 在国内, 近期已有学者开始这一领域的研究工作. 冯志华等^[5]研究了内共振条件下直线运动梁的动力稳定性, 陈立群研究了一类平带驱动系统非线性振动的幅频特性^[6]. 最近, 本文作者应用增量谐波平衡法(Incremental Harmonic Balance Method, 简称 IHB 法)研究了轴向运动梁横向非线性振动的基谐波响应^[7], 在此基础上, 本文拟更深入研究轴向运动梁在受大小不同强迫力作用下外激励频率 ω 在 ω_{10}, ω_{20} 附近的内部共振问题.

1 运动方程

图 1 所示为轴向运动梁的示意图. F 为梁运动

过程中所受的横向外力, T 为时间, V 为轴向速度, L 为梁的长度.

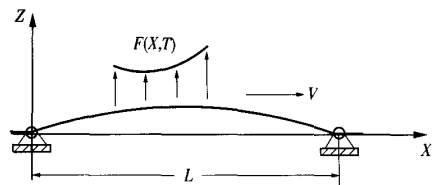


图 1 轴向运动梁以速度 V 运动的示意图

Fig. 1 Schematic of an axially moving beam with velocity V

略去高速运动体系的轴向位移对横向运动的影响, 根据哈密顿(Hamilton's Principle)原理建立横向运动微分方程^[3]

$$w_{,tt} + 2vw_{,xt} + (v^2 - 1)w_{,xx} - \frac{3}{2}v_1^2 w_{,xx}^2 + v_1^2 w_{,xxxx} = 0 \quad (1)$$

其中无量纲量

$$w = W/L, \quad x = X/L, \quad t = T \sqrt{P/\rho A L^2},$$

$$v = V/\sqrt{P/\rho A}, \quad v_1 = \sqrt{EA/P},$$

$$v_f = \sqrt{EI/PL^2}.$$

$W(X, T)$ 为横向位移, ρ 为密度, A 为横截面面积, E 为弹性模量, I 为转动惯量, P 为轴向拉力. 边界条件为

2004-02-09 收到第一稿, 2004-02-23 收到修改稿.

• 国家自然科学基金资助项目(10272117), 广东省自然科学基金资助项目(011203).

$$w(0,t)=w(1,t)=0 \quad (2)$$

$$w_{,xx}(0,t)=w_{,xx}(1,t)=0 \quad (3)$$

2 Galerkin 方法

采用分离变量法,把时间变量 t 和空间变量 x 进行分离,为此,令

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^M q_j^w(t) \sin(j\pi x) \quad (4)$$

为简便起见,这里我们取 $M=2$. 将式(4)代入(1),应用 Galerkin 方法最后可得

$$\ddot{q}_1^w - \mu_1 \dot{q}_2^w + k_{11} q_1^w + k_{12} q_1^w (q_2^w)^2 + k_{13} (q_1^w)^3 = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{q}_2^w + \mu_2 \dot{q}_2^w + k_{21} q_1^w + k_{22} q_2^w (q_1^w)^2 + k_{23} (q_2^w)^3 = 0 \quad (6)$$

其中

$$\mu_1 = 16\nu/3, \quad k_{11} = (\nu_j^2 \pi^2 - \nu^2 + 1)\pi^2,$$

$$k_{12} = 3\nu_j^2 \pi^4, \quad k_{13} = k_{12}/8,$$

$$\mu_2 = \mu_1, \quad k_{21} = 4(4\nu_j^2 \pi^2 - \nu^2 + 1)\pi^2, \quad k_{22} = k_{12},$$

$$k_{23} = 2k_{12}.$$

由于 $\mu_1 = \mu_2$, 阻尼矩阵具有反对称性,所以方程(5)和(6)是属于陀螺系统,其恢复力具有 3 次非线性.

3 增量谐波平衡法(IHB 法)

增量谐波平衡法(IHB 法)自 Lau 和 Cheung^[8]提出以来,已被广泛地应用于各种非线性振动问题. Cheung 等^[9]把该方法应用于分析具有三次非线性的系统. Sze 等^[7]进一步推广到适合于含有陀螺系统特性的非线性振动.

本文应用 IHB 法,研究轴向运动梁横向强迫振动,其振动方程由方程(5)和(6)的右边加上强迫力,可用矩阵形式表达为

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + K_3(q)q = F\cos\omega t \quad (7)$$

其中 \dot{q}, \ddot{q} 分别表示对时间的一次微商和二次微商矩阵, M, C, K, K_3 分别表示质量矩阵、阻尼矩阵、线性刚度矩阵、三次刚度矩阵,而 F, ω 分别表示强迫力矩阵和频率.

引入新的时间变量 τ , 令

$$\tau = \omega t \quad (8)$$

那么方程(7)变为

$$\omega^2 Mq'' + \omega Cq' + Kq + K_3(q)q = F\cos\tau \quad (9)$$

IHB 法的第一步就是 Newton-Raphson 的增量过程. 令 q_0 和 ω_0 表示振动过程中的某一状态,则其邻近的状态可以表示为增量的形式

$$q = q_0 + \Delta q \quad (10)$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad (11)$$

将表达式(10, 11)代入方程(9)略去高阶项,便得到矩阵形式的增量方程

$$\omega_0^2 M\Delta q'' + \omega_0 C\Delta q' + (K + 3K_3)\Delta q = R - (2\omega_0 M\dot{q}_0' + C\dot{q}_0')\Delta\omega \quad (12)$$

$$R = F\cos\tau - [\omega_0^2 M\dot{q}_0' + \omega_0 C\dot{q}_0' + Kq_0 + K_3(q_0)q_0] \quad (13)$$

R 是误差向量,当 q_0, ω_0 为准确解时,其值为零.

IHB 法的第二步就是谐波平衡过程. 为此把 q_0 和 Δq 展开成傅里叶级数

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^{n_c} a_{jk} \cos(k-1)\tau + \sum_{k=1}^{n_s} b_{jk} \sin k\tau = C_j A_j \quad (14)$$

$$\Delta q_j = \sum_{k=1}^{n_c} \Delta a_{jk} \cos(k-1)\tau + \sum_{k=1}^{n_s} \Delta b_{jk} \sin k\tau = C_j \Delta A_j \quad (15)$$

其中

$$C_j = [1, \cos\tau, \dots, \cos(n_c-1)\tau, \sin\tau, \dots, \sin n_s \tau]$$

$$A_j = [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{j n_c}, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{j n_s}]^T$$

$$\Delta A_j = [\Delta a_{j1}, \dots, \Delta a_{j n_c}, \Delta b_{j1}, \dots, \Delta b_{j n_s}]^T$$

于是

$$q_0 = SA, \Delta q = S\Delta A \quad (16)$$

其中

$S = \text{diag}[C_s, C_s], A = [A_1 \quad A_2]^T, \Delta A = [\Delta A_1 \quad \Delta A_2]^T$, 将式(16)代入公式(12)并应用 Galerkin 过程,可以得到以 $\Delta A, \Delta\omega$ 表示的线性方程组.

$$\bar{K}_{mc} \Delta A = \bar{R} - \bar{R}_{mc} \Delta\omega \quad (17)$$

其中

$$\bar{K}_{mc} = \int_0^{2\pi} S^T [\omega_0^2 MS'' + \omega_0 CS' + (K + 3K_3)S] d\tau$$

$$\bar{R} = \int_0^{2\pi} S^T [F\cos\tau - (\omega_0^2 MS'' + \omega_0 CS' + KS + K_3S)] A d\tau,$$

$$\bar{R}_{mc} = \int_0^{2\pi} S^T (2\omega_0 MS'' + CS') d\tau A$$

方程(17)是一个线性方程组,其未知量的数目比方程数目多一个,因此,求解时必须选定其中一个增量作为控制增量. 如果我们选择 $\Delta\omega$ 作为控制增量的话,则在给定的增量中, $\Delta\omega$ 是已知值,其他的增量从下列方程求解得到.

$$\bar{K}_{mc} \Delta A = \bar{R} \quad (18)$$

求得 ΔA 后,由表达式(16)求得 Δq ,再由表达式

(10)求得 q , 从而求得新的 \bar{K}_{mc}, \bar{R} 于是又可以从方程(18)求得 ΔA . 这一过程称为迭代过程. 迭代过程一直进行下去, 直到误差向量 R 小于预先规定的误差值, 此时就得到对应于 ω 的振幅 A , 从而求得原方程的解. 当迭代过程结束, 再给控制增量 ω 增加一个增量 $\Delta\omega$, 于是在新的 ω 值之下进行上述的迭代过程, 以求出对应新的 ω 值的振幅 A . 这一人为给出增量 $\Delta\omega$ 的过程称为 ω 增量过程. 整个非线性振动问题的求解过程就是反复交替应用增量过程和迭代过程.

类似地, 我们也可以把某一谐波的振幅 a_{ij} 或 b_{ij} 作为控制增量, 人为给定 Δa_{ij} 或 Δb_{ij} , 这时可从方程(17)求得 $\Delta\omega$ 和 ΔA 中其他的增量. 还可以采用弧长法, 选择频率—振幅响应曲线中的弧长作为控制增量. 具体可参见文[9].

4 算例分析

参考文[4]具有实际应用背景例子的参数, 选取 $v_1^2=1124, v_2^2=0.03, v=0.6$, 这时,

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= 2.82232, & \omega_{20} &= 9.13980, & \mu_1 &= \mu_2 = 3.2, \\ k_{11} &= 9.23882, & k_{12} &= 3372\pi^4, & k_{13} &= 421.5\pi^4, \\ k_{21} &= 72.0226, & k_{22} &= 3372\pi^4, & k_{23} &= 6744\pi^4. \end{aligned}$$

由于 $\omega_{20}/\omega_{10} \approx 3$, 于是系统将会产生内部共振. 我们分别讨论当外激励频率 ω 在两个固有频率 ω_{10} 和 ω_{20} 附近的响应情况.

4.1 外激励频率 ω 在 ω_{10} 附近的响应

外激励频率 ω 在 ω_{10} 附近时, 应当考虑 $f_2=0$. 因轴向运动梁呈现陀螺系统特性, 此时公式(14)中, 第一个变量 q_{10} 不包含正弦谐波, 即 $b_{1k}=0$, 而第二个变量 q_{20} 不包含余弦谐波, 即 $a_{2k}=0$. 另外, 由于系统只含三次非线性, 故 q_{10} 只包含余弦的奇次谐波项, q_{20} 只包含正弦的奇次谐波项. 即 $a_{1,2k}=0, b_{2,2k}=0, k=0, 1, 2, 3, \dots$. 即公式(14)成为

$$q_{10} = \sum_{k=0}^{n_r} a_{j,(2k+1)} \cos[2k+1)\tau] \quad (19)$$

$$q_{20} = \sum_{k=0}^{n_l} b_{j,(2k+1)} \sin[(2k+1)\tau] \quad (20)$$

图2所示为当 $n_c=n_s=4, f_1=0.001$ 时的频率-振幅响应曲线(为节省篇幅只画出谐波主要产生在 q_1^v 第一阶谐波 $\cos\tau$ 的振幅 a_{11} 和 q_2^v 第二阶谐波 $\sin 3\tau$ 的振幅 b_{23}). 图中还画出自由振动($f_1=f_2=0$)时的响应曲线(脊骨线), 以便比较.

从图2(a)可以看出, 在此情况下, 系统有3个

解. 对第1和第2个解, $a_{11}^{(1)}$ 和 $a_{11}^{(2)}$ 都在上相平面内, 其对应的 $b_{23}^{(1)}$ 和 $b_{23}^{(2)}$ 分别在图2(b)下相平面内和上相平面内. 对第3个解, $a_{11}^{(3)}$ 在下相平面内, 而对应的 $b_{23}^{(3)}$ 却跨越了上下两个相平面. 从图2还可以看出上

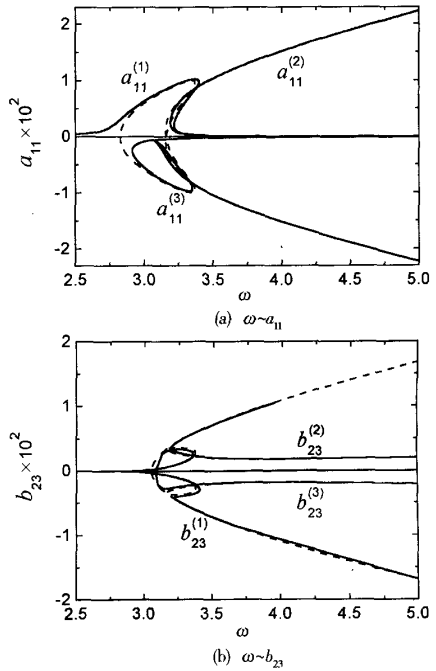


图2 当 $\omega \approx \omega_{10}, f_1=0.001$ 的基谐波响应
——强迫响应曲线;脊骨线.

Fig.2 Fundamental resonance as $\omega \approx \omega_{10}, f_1=0.001$
—— Forced response curve; Backbone curve.

下两个相平面都发生了内部共振, 当 ω 在 ω_{10} 附近时, 两个基本模态 a_{11} 和 b_{23} 振幅的大小互相转换. 然而当强迫力超过一定的临界值时, $a_{11}^{(3)}$ 和 $b_{23}^{(3)}$ 的内部共振就会消失. 如图3所示, 取 $f_1=0.0055$ 时, 图3(b)里 $a_{11}^{(3)}$ 所对应的 $b_{23}^{(3)}$ 内部共振消失, 没有发生振幅大小互相转换的过程. 从图2与图3的比较我们可以得出下列的结论: 下相平面内的内部共振与强迫力大小有关, 它只发生在当强迫力小于某一临界值的时候.

4.2 外激励频率 ω 在 ω_{20} 附近的响应

外激励频率 ω 在 ω_{20} 附近时, 应当考虑 $f_1=0$. 这时, 系统不但存在基谐波响应, 而且同时还有次谐波响应. 为了同时能求解这两种响应, 令

$$\tau = \omega t = 3\tau_1 \quad (21)$$

因轴向运动体系呈现陀螺系统特性, 同时由于

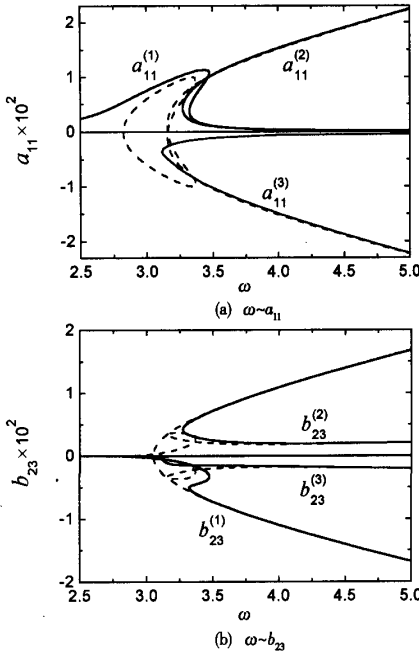


图 3 当 $\omega \approx \omega_{10}, f_1 = 0.0055$ 的基谐波响应
 ——强迫响应曲线; 脊骨线.
 Fig. 3 Fundamental resonance as $\omega \approx \omega_{10}, f_1 = 0.0055$
 —— Forced response curve; Backbone curve.

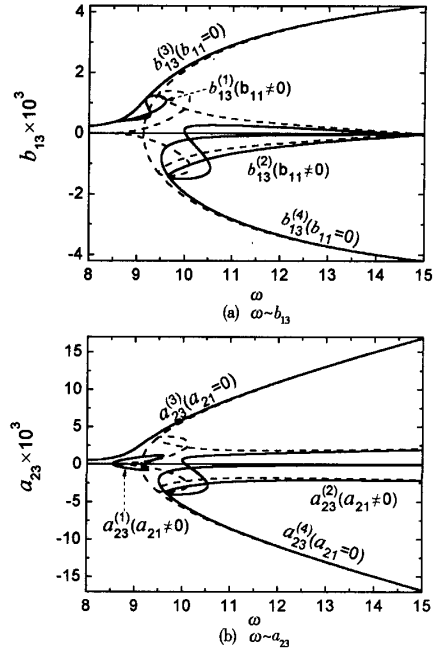


图 4 当 $\omega \approx \omega_{20}, f_2 = 0.01$ 的基谐波响应
 ——强迫响应曲线; 脊骨线.
 Fig. 4 Fundamental resonance as $\omega \approx \omega_{20}, f_2 = 0.01$
 —— Forced response curve; Backbone curve.

系统只含三次非线性,可取公式(14)的傅里叶表达式为

$$q_{10} = \sum_{k=0}^{n_1} b_{1,(2k+1)} \sin[(2k+1)\tau/3] \quad (22)$$

$$q_{20} = \sum_{k=0}^{n_2} a_{2,(2k+1)} \cos[(2k+1)\tau/3] \quad (23)$$

图 4 和图 5 所示为当 $n_c = n_s = 4, f_2 = 0.01$ 时的 $\omega \sim b_{13}, \omega \sim a_{23}, \omega \sim b_{11}, \omega \sim a_{21}$ 频率-振幅响应曲线.

从图 4 还可以看出,当激励力的频率 ω 接近于系统第二个固有频率 ω_{20} 时,系统存在两个解,而且,明显出现内部共振现象.

图 4(a) 和 4(b) 的 $\omega \sim b_{13}, \omega \sim a_{23}$ 响应曲线表示基谐波响应. 因 $\tau = \omega t$, 强迫力 $\cos \tau$ 产生 $\sin \tau$ 和 $\cos \tau$ 谐波的响应称为基谐波响应. 从振幅的大小看, q_{23} 最大, 此时的响应发生在 q_2^v 的 $\cos \tau$ 项上. b_{13} 次之, 对应的响应发生在 q_1^v 的 $\sin \tau$ 项上. 它们对应于 $a_{21} = 0, b_{11} = 0$.

图 5(a) 和图 5(b) 的 $\omega \sim b_{11}, \omega \sim a_{21}$ 响应曲线表示次谐波响应. 因 $\tau = \omega t$, 强迫力 $\cos \tau$ 产生 $\cos(\tau/3)$ 和 $\sin(\tau/3)$ 谐波的响应称为次谐波响应. 从振幅的

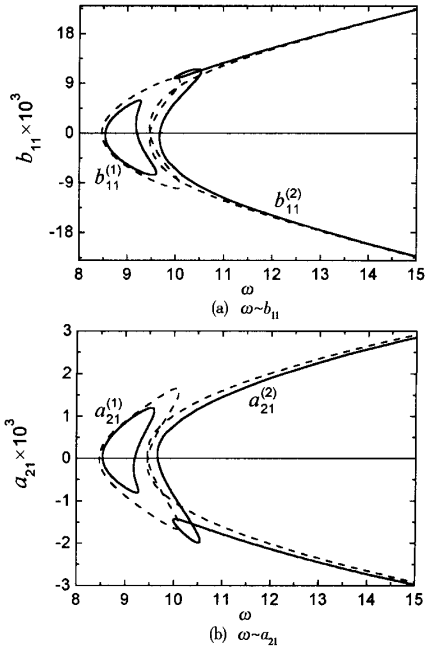


图 5 当 $\omega \approx \omega_{20}, f_2 = 0.01$ 的次谐波响应
 ——强迫响应曲线; 脊骨线.
 Fig. 5 Subharmonic resonance as $\omega \approx \omega_{20}, f_2 = 0.01$
 —— Forced response curve; Backbone curve.

大小看, b_{11} 最大, 此时的响应发生在 q_1^w 的 $\sin(\tau/3)$ 项上. a_{21} 次之, 对应的响应发生在 q_2^w 的 $\cos(\tau/3)$ 项上.

与外激励频率 ω 在 ω_{10} 附近时的响应类似, 外激励频率 ω 在 ω_{20} 附近时的内部共振也依赖于强迫力振幅 f_2 的大小. 当 f_2 超过某一临界值时, 其内部共振就会消失. 图 6 所示为 $f_2=0.0169$ 时的 $\omega \sim a_{23}$ 基谐波频率-振幅响应曲线, 图 7 所示为 $f_2=0.0169$ 时的 $\omega \sim b_{11}$ 次谐波频率-振幅响应曲线. 对比图 4 (b) 与图 6, 可以看出, 在图 6 中, $a_{23}^{(1)}=0$. 同样, 对比图 5(a) 与图 7 可以看出, 在图 7 中, $b_{11}^{(1)}=0$, 这说明了此时不存在第一个解, 内部共振也消失了.

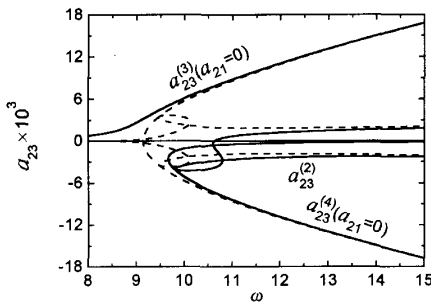


图 6 当 $\omega \approx \omega_{20}, f_2=0.0169$ 时的次谐波响应 $\omega \sim a_{23}$
——强迫响应曲线; 脊骨线.

Fig. 6 Fundamental resonance $\omega \sim a_{23}$ as $\omega \approx \omega_{20}, f_2=0.0169$
—— Forced response curve; Backbone curve.

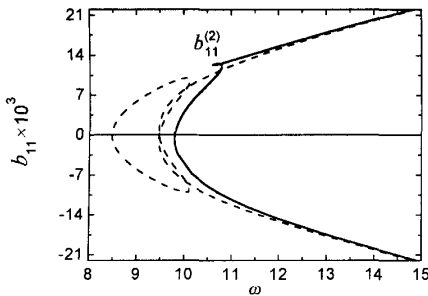


图 7 当 $\omega \approx \omega_{20}, f_2=0.0169$ 时的次谐波响应 $\omega \sim b_{11}$
——强迫响应曲线; 脊骨线.

Fig. 7 Supharmonic resonance $\omega \sim b_{11}$ as $\omega \approx \omega_{20}, f_2=0.0169$
—— Forced response curve; Backbone curve.

5 结论

1) 增量谐波平衡法 (IHB 法) 是一个研究非线性振动通用的半解析半数值的方法. 它不但适用于弱非线性系统, 也适用于强非线性系统; 不但适用于惯性参考系下的非线性振动, 也适用于非惯性参考系下的陀螺系统的非线性振动.

2) 轴向运动梁属于具有三次非线性的陀螺系统, 其非线性振动特别是内部共振现象比较复杂, 典型算例揭示了内部共振与激励力的振幅大小有关.

3) 当激励频率 ω 在第一阶固有频率 ω_{10} 附近, 激励力的振幅小于某一临界值 ($f_1 < f_c$) 时, 系统在上、下相平面内都有内部共振, 而当 $f_1 > f_c$ 时, 系统第三个解 (在下相平面内) 的内部共振就消失.

4) 当激励频率 ω 在第二阶固有频率 ω_{20} 附近, 激励力的振幅小于某一临界值 ($f_2 < f_c$) 时, 系统有内部共振, 而当 $f_2 > f_c$ 时, 发生内部共振的解不存在, 因而系统也就没有内部共振.

参 考 文 献

- 1 Wickert JA, Mote CD. Current research on the vibration and stability of axially-moving materials. *Shock and Vibration*, 1988, 29(5):3~13
- 2 Pellicano F, Vestroni F. Nonlinear dynamics and bifurcations of an axially moving beam. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2000, 122:21~30
- 3 Wickert JA. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, 27(3):503~517
- 4 Riedel CH, Tan CA. Coupled, forced response of an axially moving strip with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37:101~116
- 5 冯志华, 胡海岩. 内共振条件下直线运动梁的动力稳定. *力学学报*, 2002, 34(3):389~400 (Feng ZH, Hu HY. Dynamic stability of a slender beam with internal resonance under a large linear motion. *Acta Mechanica Sinica*. 2002, 34(3):389~400 (in Chinese))
- 6 陈立群. 一类平带驱动系统非线性振动的幅频特性. *工程力学*, 2003, 21(1):149~152 (Chen LQ. Amplitude-frequency characteristics of nonlinear vibration of a serpentine belt drive system. *Engineering Mechanics*, 2003, 21(1):149~152 (in Chinese))
- 7 Sze KY, Chen SH, Huang JL. The Incremental Harmonic Balance Method for Nonlinear Vibration of Axially Moving Beams. *Journal of Sound and Vibration*, (accepted for publication).
- 8 Lau SL, Cheung YK. Amplitude incremental variational principle for non-linear vibration of elastic systems. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1981, 48:959~964
- 9 Cheung YK, Chen SH, Lau SL. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 140:73~86

STUDY ON THE LATERALLY NONLINEAR VIBRATION OF AXIALLY MOVING BEAMS*

Chen Shuhui¹ Huang Jianliang¹ She Jinyan²

(1. *Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China*)

(2. *Department of Mechanical Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong, China*)

Abstract The laterally nonlinear vibration of axially moving beams were analyzed by the incremental harmonic balance (IHB) method. Firstly the motion equations of an axially moving beam were derived by Hamilton's principle. Then the Galerkin method was used to discretize the governing equations. Finally, the IHB method was employed to solve the nonlinear vibration equations. Particular attention was paid to the fundamental, subharmonic resonance with internal resonance under the condition $\omega_{20}/\omega_{10} \approx 3$ as ω is near ω_{10} , ω_{20} , where ω is the forcing frequency, and ω_{10} and ω_{20} are the first and the second natural frequencies. The number results show that the IHB method is a very effective semi-analytical and semi-numerical method for nonlinear vibration of axially moving systems.

Key words axially moving beams, nonlinear vibration, incremental harmonic balance method, internal resonance

Received 09 February 2004, revised 23 February 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272117) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province China (011203)