非线性动力学方程的李级数解法及其应用*

张素英[1] 邓子辰[1,2]

(1. 西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 分别从推广的微分方程幂级数解的理论和线性算子半群理论等不同的角度研究了非线性动力学方程的求解问题, 得到了所谓的李级数解法. 并进一步讨论了算法的具体实施过程, 它可以用于构造非线性动力学方程任意高阶的显式积分格式. 最后, 把李级数解法应用于求解广义 Hamilton 系统, 它能保持广义 Hamilton 系统真解的典则性. 数值算例显示该方法是有效的.

关键词 非线性动力学方程, 李级数, 微分算子, 微分算子的预解式

引 言

大多数力学问题的本质都是非线性的, 它们一般由非线性微分方程描述. 对于非线性的动力学方程, 人们除了直接寻求它们的封闭形式的解析解之外, 还经常用线性化方法化为线性近似方程去求解. 然而, 理论和实践分析发现, 非线性方程在大多数情形下不存在封闭形式的分析解; 此外, 线性化方法有很大局限性, 只有在一定条件下才能给出较准确的结果. 因此这些方法不能满足非线性力学问题研究的需要. 欲推广微分方程的求解范围, 应该放弃解的"有限形式", 而转向寻求"无限形式"的解, 例如, 无穷级数解. 牛顿和莱布尼兹早就用级数解法求解过某些微分方程, 级数解法属于古典解析理论. 本文推广了微分方程幂级数解[1]的方法, 讨论了一阶常微分方程组及高阶常微分方程初值问题的求解, 给出了所谓的李级数解法. 另外, 用微分算子[2~4] (李算子) 的语言形式表示微分方程之后, 其中微分算子的预解式就是原微分方程的解算子的 Laplace 变换[5], 用 Laplace 逆变换[6~7]讨论微分方程的求解, 再次得到了李级数解法. 进而基于李级数方法, 在广义 Hamilton 系统解析解的理论[8]基础上给出了构造广义 Hamilton 系统任意高阶的显式保结构积分格式的方法.

1 李级数解法

1.1 基本方程

考虑自治微分方程系统

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \tag{1}$$

其中 $x=[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^\tau$, $\dot{x}=(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)^\tau$, $\dot{x}_i$表示 x 的第 i 个分量对时间 t 的导数, $f(x)=[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)]^\tau$ 是解析矢量值函数, $x_0=(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(n)})^\tau$ 是时间为零时 x 的初值, τ 表示矩阵的转置. 根据李群-李代数理论, (1)式的右端 $f(x)$定义了一个向量场

$$L = L(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n} = (f_1, \cdots, f_n)(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})^\tau \tag{2}$$

其中$(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})^\tau$ 是既有矢量性质又有求偏微分特性的矢量偏微分算子. 则微分方程(1)可表示为

$$\dot{x} = L(x)x \tag{3}$$

对于非自治动力学系统

$$\dot{x} = f(x, t), x(0) = x_0 \tag{4}$$

令 $x_{n+1}=t, \dot{x}_{n+1}=1$, 则原微分方程变为: $\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{f}(\tilde{x})$, $\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0$, 这里 $\tilde{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})^\tau$, $\tilde{f}(\tilde{x})=[f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), \cdots, f_n(\tilde{x}), 1]^\tau$, $\tilde{x}_0=(x_0^{(1)}, \cdots, x_0^{(n)}, 0)^\tau$, 与模型(1)完全相同.

2003-12-02 收到第一稿, 2004-01-05 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10372084)、霍英东青年教师基金(71005)、高校博士点专项基金(20010699016)、大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金及西北工业大学博士创新基金资助项目

微分方程(1)及(3)的解称为 $f(x)$ 生成的流，它是一个单参数李变换群. 求一个给定向量场 $f(x)$ 生成的流（即求解常微分方程组的初值问题）叫做对给定向量场 $f(x)$ 取指数[9].

1.2 常微分方程组初值问题的李级数解

根据李群的观点，求解常微分方程（组）初值问题(1)相当于由无穷小变换 $\delta\chi: x_0 \to x_0 + \delta x$ 寻求整体变换 $\chi: x_0 \to x(t)$，该整体变换是一单参数李变换群.

定理 1 常微分方程（组）初值问题(1)的解是一单参数变换群，它有指数形式（也称李级数形式）

$$x_i(t) = x_i(x_0, t) = l^{tL} x_i \|_{x=x_0}, i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

其中微分算子 $l^{tL} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n$.

证 沿积分曲线 $x_i = x_i(t), i = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}, \frac{\partial x_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial x_i}{\partial x_n}\right)^{\tau} =$$

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n)\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}, \frac{\partial x_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial x_i}{\partial x_n}\right)^{\tau} = Lx_i$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Lx_i) =$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_1}[Lx_i] + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_2}[Lx_i] + \cdots + \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_n}[Lx_i] =$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\tau} \cdot (Lx_i) = L(Lx_i) = L^2 x_i$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^n x_i}{\mathrm{d}t^n} = L^n x_i$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_i(t) = x_i(x_0, t) = x_i^0 + t\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(x_0) + \frac{t^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}(x_0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n x_i}{\mathrm{d}t^n}(x_0) + \cdots =$$

$$[x_i + tLx_i + \frac{1}{2!}t^2 L^2 x_i + \cdots + \frac{1}{n!}t^n L^n x_i + \cdots]_{x=x_0} = l^{tL} x_i \|_{x=x_0}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

显然，当 $f \in C^{\infty}$ 时，级数解(5)在 $t=0$ 的某邻域收敛.

1.3 李级数数值方法

把李级数解表示为显式

$$x_i(t) = l^{tL} x_i \|_{x=x_0} = [x_i + tLx_i + \frac{1}{2!}t^2 L^2 x_i + \cdots + \frac{1}{n!}t^n L^n x_i + \cdots]_{x=x_0} \tag{6}$$

定义 $1 \times n$ 矩阵函数 $F(x) = f^{\tau}(x) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$，定义函数 $L_i^1 = L_i^1(x) = f_i$，$L_i^2(x) = F \cdot (\frac{\partial L_i^1}{\partial x})$，其中，$\frac{\partial L_i^1}{\partial x}$ 是函数 L_i^1 的梯度，即

$$\frac{\partial L_i^1}{\partial x} = (\frac{\partial L_i^1}{\partial x_1}, \frac{\partial L_i^1}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial L_i^1}{\partial x_n})^{\tau}, \cdots\cdots$$

记 $L_i^0 = x_i$，则 $L_i^k(x) = F \cdot (\frac{\partial L_i^{k-1}}{\partial x})$，$k = 1, 2, \cdots$ 显然，$L_i^k = L_i^k(x) = L^k x_i$. 那么 $x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{k!} L_i^k \|_{x=x_0}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，只要 $f(x)$ 足够光滑，可以方便地得到任意精度要求的数值解. 根据计算精度的要求，截取李级数展开式的前 $m+1$ 项可得 m 阶近似解. 设步长为 h，记 $x_k^{(i)}$ 为第 k 次迭代值，那么，$x_1^{(i)} = x_i(x_0, h) = x_0^{(i)} + hL_i^1(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!}L_i^n(x_0)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，它是第一次迭代值，得到 $x_1 = x(h) = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(n)})$，记 $x_k = x(kh) = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(n)})$，那么，第 k 次迭代值为：$x_k^{(i)} = x_i(x_{k-1}, h)$，$i = 1, 2, \cdots, n$；$k = 1, 2, \cdots$，如此得到 m 阶精度的数值解.

对于复杂动力学系统的微分方程：$\dot{x} = f(x)$，可以通过分裂合成的方法[10]进行求解. 也就是说，如果线性算子 $L(x)$ 能分裂成不可交换的两部分 $A(x)$ 和 $B(x)$，即，$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \neq 0$，而且，$A$ 和 B 看作独立的线性算子时，它们对应的微分方程能精确求解或较容易求解，那么，由李级数解法求解较为简单的微分方程 $\dot{x} = Ax$ 和 $\dot{x} = Bx$ 可得它们的解分别为 $x(t) = \exp(tA)x_0$ 和 $x(t) = \exp(tB)x_0$. 则，由对称合成的积分方法可得原微分方程的解 $x(t) = \exp(tL)x_0$. 即最后可获得原动力学方程的 n 阶近似格式

$$x_{k+1} = \exp(hL)x_k = (\prod_{i=1}^{n}[\exp(c_i hA)\exp(d_i hB))x_k + O(h^{m+1}), k = 0, 1, 2, \tag{7}$$

当 $m = 2$（2 阶积分），最简单的形式是 $n = 2$，$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$，$d_1 = 1$，$d_2 = 0$. 当 $m = 4$，有四阶积分公式为

$$x_{k+1} = \exp(hL)x_n = \prod_{i=1}^{4}[\exp(c_i hA)\exp(d_i hB)x_k +$$

$$O(h^5), k = 0,1,2,\cdots \tag{8}$$

其中

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(1+\alpha)},$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1}{1+\alpha},$$

$$c_2 = c_3 = \frac{\alpha}{2(1+\alpha)},$$

$$d_2 = \frac{\alpha-1}{1+\alpha}, d_4 = 0 \tag{9}$$

及　　$\alpha=1-2^{1/3}$.

1.4 N 阶常微分方程的解法

对于高阶常微分方程

$$x^{(N)} = g(x, x', \cdots, x^{(N-1)}), x \in R$$

$$x(0) = x_0^{(1)}, x'(0) = x_0^{(2)}, \cdots, x^{(N-1)}(0) = x_0^{(N)} \tag{10}$$

可化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdots \\ \dot{x}_N = g(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}) \\ x_i(0) = x_0^{(i)}, (i = 1,2,\cdots,N) \end{cases} \tag{11}$$

则,$x_i(t)=x_0^{(i)}+tLx_i+\cdots+\frac{t^n}{n!}L^n x_i+\cdots$, $|t|<\delta$, $i=1,2,\cdots,N$,其中,δ 是某一正数. 微分算子 $L=(x_2,\cdots,x_N,g)(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_N})^{\tau}$,那么,$x(t)=x_1(t)$.

如下构造(10)及(11)的 $m(m\geq N)$ 阶精度的数值解:

记 $L_i^k=L^k x_i$, $i=1,2,\cdots,N$; $k=1,2,\cdots,m$,不难证明:

$$L_1^1 = x_2, L_1^k = x_{k+1}, k = 1,2,\cdots,N\text{-}1,$$

$$L_1^N = g, L_1^{N+1} = LL_1^N, \cdots, L_1^m = LL_1^{m-1};$$

$$L_2^k = L_1^{k+1}, k = 1,2,\cdots,m\text{-}1, L_2^m = LL_1^m$$

即

$$L_i^k = L_{i-1}^{k+1}, k = 1,2,\cdots,m\text{-}1, i = 1,2,\cdots,N \tag{12}$$

$$L_i^m = LL_{i-1}^m$$

可见,只须计算 $L_1^{N+1},\cdots,L_1^m$ 以及 $L_i^m(i=2,3,\cdots,N)$,而且 $L_i^m=L(L_{i-1}^m)$. 所求 $x(kh)=x_1(kh)$, $k=1,2,\cdots$. 由上可见,对于求解高阶常微分方程初值问题,该方法尤其经济、有效.

2　基于 Laplace 逆变换求解非线性动力学方程

2.1　数学理论

对于常微分方程初值问题

$$\frac{dx}{dt} - Lx = 0, x(0) = x_0 \tag{13}$$

其中,L 是一个线性算子. 根据算子半群理论[5],L 的预解式 $R(\lambda;L)=(\lambda I-L)^{-1}$是微分方程(13)的解(算子)的 Laplace 变换. 因此,我们期望通过对 L 的预解式的逆 Laplace 变换得到微分方程的解. 本节通过逐步近似计算算子 L 的预解式的 Laplace 逆变换来求解动力学微分方程. 首先介绍相关理论.

2.1.1　有界线性算子半群及其无穷小生成元

定义 1　设 X 是 Banach 空间,$T(t)(0\leq t<\infty)$ 是映 X 到 X 内的有界线性算子的单参数族. 称 $T(t)(0\leq t<\infty)$是 X 上的有界线性算子半群,如果

(Ⅰ)$T(0)=I$(I 是 X 上的恒等算子),

(Ⅱ)$T(t+s)=T(t)T(s)$对一切 $t,s\geq 0$ 成立(半群性质).

定义 2　命

$$D(L) = \left\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x-x}{t} \text{存在}\right\} \tag{14}$$

对于,$x\in D(L)$,

$$Lx = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{d^+ T(t)x}{dt}\right|_{t=0} \tag{15}$$

则称线性算子 L 是半群 $T(t)$的无穷小生成元,$D(L)$是 L 的定义域.

定义 3　Banach 空间 X 上的有界线性算子半群 $T(t)$, $0\leqslant t<\infty$称为有界线性算子强连续半群,如果

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \text{对一切 } x \in K \text{ 成立} \tag{16}$$

一个 X 上的有界线性算子强连续半群将称为一个 C_0 类半群,或简称为一个 C_0 半群.

2.1.2　线性算子 L 的预解式

定义 4　如果 L 是 X 中的一个线性算子(不必是有界的),那么 L 的预解集 $\rho(L)$是使 $\lambda I-L$ 可逆,且$(\lambda I-L)^{-1}$是 X 中有界线性算子的一切复数 λ 的集合. 有界线性算子族 $R(\lambda;L)=(\lambda I-L)^{-1}$, $\lambda\in\rho(L)$,称为 L 的预解式.

定理 2　设 L 是 X 上一个有界线性算子. 如果 $\gamma>\|L\|$,则

$$l^{tL}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}l^{\lambda t}R(\lambda;L)\mathrm{d}\lambda \tag{17}$$

(17)中的收敛是依一致算子拓扑的，并且在 t 的有界区间上一致的.

定理 3 设 L 是满足 $\|T(t)\|\leqslant Ml^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元. 又设 $\gamma>\max\{0,\omega\}$，对 $x\in D(L^2)$，则

$$T(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}l^{\lambda t}R(\lambda;L)x\mathrm{d}\lambda \tag{18}$$

并且对每一 $\delta>0$，积分关于 t 在 $t\in[\delta,1/\delta]$ 上一致收敛.

根据李群理论，由定理 2 和定理 3 可知，$T(t)x_0$ 微分方程初值问题(13)的解. 又根据定理 3，我们得到：如果 $\|T(t)\|\leqslant Ml^{\omega t}$，则

$$R(\lambda;L)x=\int_0^{\infty}l^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t \tag{19}$$

对于 $x\in X$，$\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 成立. 即 L 的预解式是半群 $T(t)$ 的 Laplace 变换. 因此我们期望通过对 L 的预解式的逆 Laplace 变换得到半群 $T(t)$.

2.2 数值方法

对于非线性动力学微分方程(1)及(4)，线性算子 L 分别是

$$L(x)=f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+ f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}=(f_1,\cdots,f_n)(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})^{\tau} \tag{20}$$

及

$$L(x,t)=f_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+ f_n(x,t)\frac{\partial}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial t}=(f_1,\cdots,f_n,1)(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial t})^{\tau} \tag{21}$$

我们可以把 L 的预解式 $R(\lambda;L)=(\lambda I-L)^{-1}$ 展开为一致收敛的关于算子 L 的无穷级数

$$R(\lambda;L)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^k}{\lambda^{k+1}} \tag{22}$$

由前一节可知解算子 $T(t)$ 是 L 的预解式的 Laplace 逆变换，根据(22)我们逐项对 λ 作 Laplace 逆变换可得解算子为

$$T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}L^k \tag{23}$$

我们以 h 为时间步长，截取(23)的前 $m+1$ 项作为 $T(t)$ 的近似. 从 x_0 逐步迭代便可近似求解微分方程初值问题(13).

将(22)及(23)中算子作用于 x_0，就是分别作用于 x_0 的每一个分量，即

$$T(h)x_0^{(i)}=\sum_{k=0}^{m}\frac{h^k}{k!}L^k(x_0,0)x_0^{(i)},i=1,2,\cdots,n \tag{24}$$

其中 $x_0^{(i)}$ 表示 x_0 的第 i 个分量. 这样我们得到了 $t=h$ 时的方程组的近似解 $x_1^{(i)}=T(h)x_0^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,n$，即得到 $x_1=[x_1^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_1^{(n)}]^{\tau}$. 如此迭代，当 $t=kh$ 时的方程组的近似解为 $x_k=[x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}]^{\tau}$，$k=1,2,\cdots$，其中 $x_k^{(i)}$ 为

$$x_k^{(i)}=T(h)x_{k-1}^{(i)}=\sum_{k=0}^{m}\frac{h^k}{k!}L^k (x_{k-1},(k-1)h)x_{k-1}^{(i)},i=1,2,\cdots,n \tag{25}$$

因为(20)、(21)与(2)相同，可见(25)同李级数解法. 由此，我们再一次得到李级数方法.

2.3 特例——线性常微分方程的求解

对于线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-Bx=0,x(0)=x_0 \tag{26}$$

其中，B 是一个定常矩阵. 则对应的预解式为关于定常矩阵 B 的无穷级数

$$R(\lambda;B)=(\lambda I-B)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{\lambda^{k+1}} \tag{27}$$

对应于预解式(27)的 Laplace 逆变换正是

$$T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}B^k=\exp(tB) \tag{28}$$

因此，(26)的解为

$$x(t)=T(t)x_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}B^kx_0=\exp(tB)x_0 \tag{29}$$

展开式(29)没有被截断，所以得到了精确解.

3 李级数解法在广义 Hamilton 系统中的应用

3.1 基本理论

考虑如下广义自治 Hamilton 系统

$$\dot{x}_i=\{x_i,H\}=\sum_{j=1}^{n}J_{ij}(x)\frac{\partial H}{\partial x_j}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{30}$$

其中，$\{,\}$ 是广义 Poisson 括号，其结构矩阵 $J(x)$ 是一个 $n\times n$ 阶反对称矩阵，其元素由 $J_{ij}(x)$ 称为结构元素. 对于任意两个关于 x 的函数 F,G，有

$$\{F,G\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J_{ij}(x)\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} \tag{31}$$

定理 4 若变换 $x\to y=\phi(x)$ 是一个微分同胚，则它把 $J(x)$ 变为 $\tilde{J}(y)$，后者仍然是广义 Poisson 括

号的结构矩阵,且有关系

$$\tilde{J}_{\rho\sigma}(y)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial y_\rho}{\partial x_i}\frac{\partial y_\sigma}{\partial x_j}J_{ij}(\phi^{-1}(y)),$$
$$\rho,\sigma=1,2,\cdots,n \tag{32}$$

定义5 若上述变换 $x\to y=\phi(x)$ 保持广义Poisson括号结构不变,即

$$\tilde{J}_{\rho\sigma}(y)=J_{\rho\sigma}(y),\rho\sigma=1,2,\cdots,n \tag{33}$$

此变换称为广义典则变换.

设

$$x_i(t)=\Psi_i(x_0,t),\Psi_i(x_0,0)=x_0^{(i)}$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{34}$$

是广义Hamilton方程(30)的 $t=0$ 时过 x_0 的解. 那么对解的存在域中的任何 t,(34)式确定了一个变换

$$\Psi:x_0\to\Psi(x_0,t)\equiv x \tag{35}$$

可以证明该变换是一个广义典则变换[8],即

$$\sum_{i,j=1}^{n}J_{ij}(x_0)\frac{\partial\Psi_\rho(x_0,t)}{\partial x_0^{(i)}}\frac{\partial\Psi_\sigma(x_0,t)}{\partial x_0^{(j)}}=J_{\rho\sigma}(x) \tag{36}$$

对于自治的广义Hamilton系统,上述典则变换(35)可以显式表示为[8]

$$\Psi_i(x_0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A_n^i(x_0),$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{37}$$

$$A_0^i(x_0)=x_0^{(i)},A_{n+1}^i(x_0)=\{A_n^i(x_0),H(x_0)\}. \tag{38}$$

定义如下算子

$$\tilde{L}(x_0)=-\sum_{i,j=1}^{n}J_{ij}(x_0)\frac{\partial H}{\partial x_0^{(i)}}\frac{\partial}{\partial x_0^{(j)}} \tag{39}$$

那么可以将 Ψ 写成更紧凑的形式

$$\Psi_i(x_0,t)=e^{t\tilde{L}(x_0)}x_0^{(i)},$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{40}$$

3.2 数值方法

如下我们根据(40)来构造数值迭代算法. 记

$$\tilde{L}(x_0)=-\sum_{i,j=1}^{n}J_{ij}(x_0)\frac{\partial H}{\partial x_0^{(i)}}\frac{\partial}{\partial x_0^{(j)}}=$$
$$f_1(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0^{(1)}}+f_2(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0^{(2)}}+\cdots+f_n(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0^{(n)}} \tag{41}$$

那么

$$\tilde{L}(x_0)x_0^{(i)}=f_i(x_0),$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{42}$$

简记

$$L_i^1=L_i^1(x_0)=\tilde{L}(x_0)x_0^{(i)}$$
$$L_i^k=L_i^k(x_0)=\tilde{L}^k(x_0)x_0^{(i)},k=1,2,\cdots \tag{43}$$

那么,我们有

$$L_i^1=\tilde{L}x_0^{(i)}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\cdot$$
$$\left(\frac{\partial x_0^{(i)}}{\partial x_0^{(1)}},\cdots,\frac{\partial x_0^{(i)}}{\partial x_0^{(i)}},\cdots,\frac{\partial x_0^{(i)}}{\partial x_0^{(n)}}\right)^{\tau}=f_i$$
$$L_i^2=\tilde{L}^2x_0^{(i)}=\tilde{L}f_i=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\cdot$$
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(1)}},\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(2)}},\cdots\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(n)}}\right)^{\tau}$$
$$L_i^m=\tilde{L}^mx_0^{(i)}=\tilde{L}^{m-1}f_i=C_{m-2}^0\cdot$$
$$(L_1^{m-1},L_2^{m-1},\cdots,L_n^{m-1})\cdot$$
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(1)}},\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(2)}},\cdots\frac{\partial f_i}{\partial x^{(n)}}\right)^{\tau}+$$
$$C_{m-2}^1(L_1^{m-2},L_2^{m-2},\cdots,L_n^{m-2})\cdot$$
$$\left(\tilde{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(1)}},\tilde{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(2)}},\cdots,\tilde{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(n)}}\right)^{\tau}+$$
$$\cdots+$$
$$C_{m-2}^{m-2}(f_1,f_2,\cdots,f_n)\left(\tilde{L}^{m-2}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(1)}},\right.$$
$$\left.\tilde{L}^{m-2}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(2)}},\cdots,\tilde{L}^{m-2}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^{(n)}}\right)^{\tau},$$
$$i=1,2,\cdots,n,\text{而}\ m=3,4,5,\cdots \tag{44}$$

由上可见,要计算 L_i^m,只需在 L_i^{m-1} 及 $L^{m-3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$,$m=3,4,5,\cdots$($L^0\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$)的基础上进一步计算 $L^{m-2}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$,$j=1,2,\cdots,n$,$i=1,2,\cdots,n$. 如此,我们可以构造 m ($m\geq1$)阶迭代格式. 设步长为 h,记 $x_k^{(i)}$ 为 x 的第 i 个分量的第 k 次迭代值,那么,$x_1^{(i)}=\Psi_i(x_0,h)=x_0^{(i)}+hL_i^1(x_0)+\cdots+\frac{h^m}{m!}L_i^m(x_0)$,$i=1,2,\cdots,n$,它是第一次迭代值,得到 $x_1=(x_1^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_1^{(n)})^{\tau}$,第 k 次迭代值为 $x_k=(x_k^{(1)},\cdots,x_k^{(n)})^{\tau}$,其中 $x_k^{(i)}=\Psi_i(x_{k-1},h)$,也就是

$$x_k^{(i)}=\Psi_i(x_{k-1},h)=x_{k-1}^{(i)}+hL_i^1(x_{k-1})+\cdots+$$
$$\frac{h^m}{m!}L_i^m(x_{k-1}),i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots \tag{45}$$

如此可得 m 阶精度的数值解.

由此可见,李级数解法可保持广义Hamilton系统真解的典则性质,而传统的数值方法不能保持广义Hamilton系统的这个重要性质. 李级数解法还可用于对原来动力学系统进行进一步的理论分析和数值研究. 其优点还在于理论简单,而且可以方便地构造动力学系统的任意 m($m\geq1$)阶算法.

4 算 例

例1 求解非线性周期系统响应问题[11]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2.25x_1 - (x_1 - 1.5\sin t)^3 + 2\sin t, \\ x_1(0) = 0.0, x_2(0) = 1.59929 \end{cases}$$

其精确解是

$$\begin{cases} x_1(t) = 1.59941\sin t - 0.00004\sin 3t \\ x_2(t) = 1.59941\cos t - 0.00012\cos 3t \end{cases}$$

取四阶精度数值解法，步长 $h=0.1$，近似解与精确解比较所得误差如图 1 和图 2 所示.

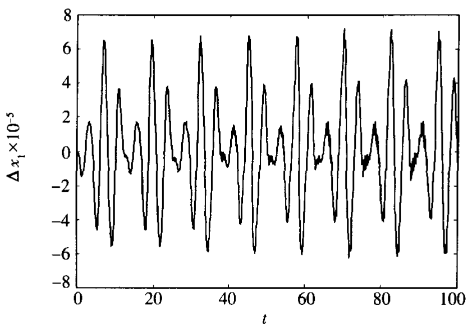

图 1 变量 x_1 的误差 Δx_1

Fig. 1 The error Δx_1 of the variable x_1

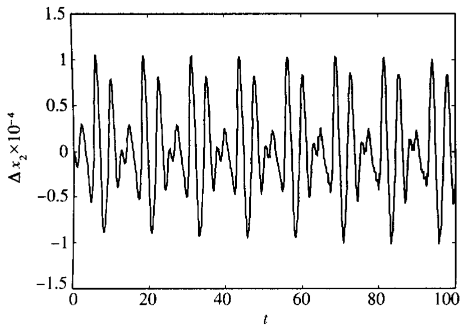

图 2 变量 x_2 的误差 Δx_2

Fig. 2 The error Δx_2 of the variable x_2

例 2 求解如下 Hamilton 系统微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1.9\sqrt{2} \\ \sqrt{3}/4 \\ -1.9\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

其中 $H=\frac{p_1^2+q_1^2}{p_2^2+q_2^2}$. 我们取时间步长 $h=0.1$，采用二阶算法进行计算，图 3 给出了迭代 10000 步 Hamilton 函数的误差变化，图 4 和图 5 分别给出了对偶变量 q_1，p_1 及 q_2，p_2 的误差.

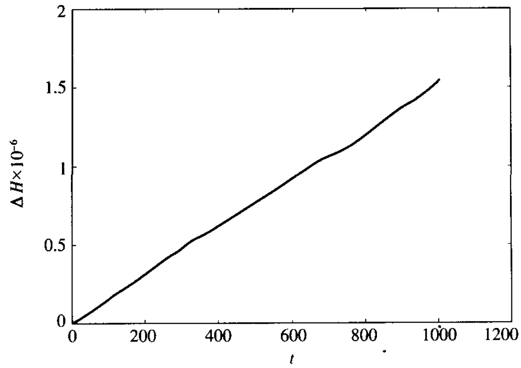

图 3 Hamilton 函数的误差

Fig. 3 The error of the Hamilton function

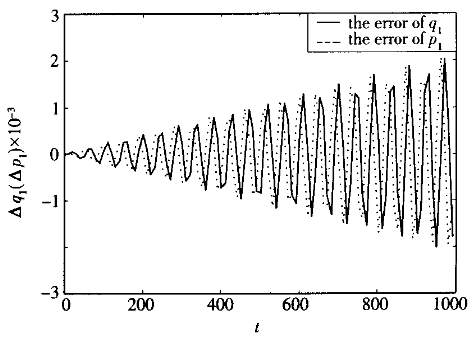

图 4 变量 q_1，p_1 的误差

Fig. 4 The error of variable q_1，p_1

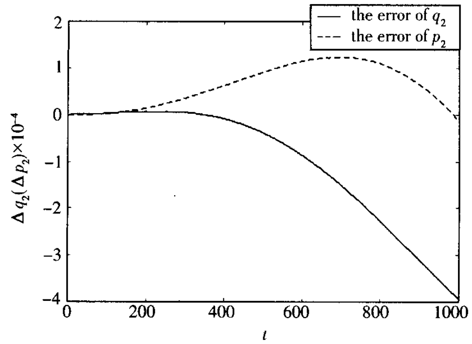

图 5 变量 q_2，p_2 的误差

Fig. 5 The error of variable q_2，p_2

5 结　论

本文用微分算子(李算子)的语言形式来表示微分方程,其中微分算子的预解式就是原微分方程的解算子的 Laplace 变换,而后分别用 Laplace 逆变换和推广微分方程幂级数解的方法,讨论了一阶常微分方程组及高阶常微分方程初值问题的求解,给出了所谓的李级数解法.进而基于李级数方法,在广义 Hamilton 系统解析解的理论基础上给出了构造广义 Hamilton 系统任意高阶的显式保结构积分格式的方法,同时讨论了算法的具体实施过程.该李级数解法可用于对原来动力系统进行进一步的理论分析和数值研究,特别是它可保持动力学自治系统内在的定性性质.

参 考 文 献

1 钱伟长.微分方程的理论及其解法.北京:国防工业出版社,1992,362～406(Qian Weichang. The theory of differential equation and its application. Beijing: Defense Industry Press,1992,362～406(in Chinese))

2 Arnold VI. Mathematical method of classical-mechanics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989, 185～230

3 潘祖梁.非线性问题的数学方法及其应用.杭州:浙江大学出版社,1998. 1～38(Pan Zhuliang. The mathematical method of nonlinear problem and its application. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1998. 1～38(in Chinese))

4 宋文淼.矢量偏微分算子.北京:科学出版社,1999. 1～8 (Sun Wenmiao. Vector partial differential operators. Beijing: Science Press,1999. 1～8(in Chinese))

5 Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 1～63

6 周肇锡.拉普拉斯变换和傅里叶变换.北京:国防工业出版社,1990. 131-140(Zhou Zhaoxi. Laplace transform and Fourior transform. Beijing: Defense Industry Press,1990. 131～140(in Chinese))

7 熊大国.积分变换.北京:北京理工大学出版社,1990. 99～108(Xiong Daguo. Integral transformation. Beijing: Beijing Institute of Technology Press,1990. 99～108(in Chinese))

8 李继彬,赵晓华,刘正荣.广义哈密顿理论及其应用.北京:科学出版社,1999. 74～111(Li jibing,Zhao Xiaohua, Liu Zhengrong. Generalized Hamiltonian theory and its application. Beijing: Science Press, 1999. 74～111(in Chinese))

9 项武义,侯自信,孟道骥.李群讲义.北京:北京大学出版社,1992. 22～39(Xiang Wuyi,Hou Zixin,Meng Daoji. Vector partial differential operators, Beijing: Beijing University Press,1992. 22～39(in Chinese))

10 McLachlan RI. On the numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods. *SIAM J Sci Comput*, 1995; 16:151～168

11 蔡志勤,顾元宪,钟万勰.一类非线性周期系统响应的精细积分法.力学季刊,2000,21(2):145～148(Cai Zhiqin, Gu Yuanxian, Zhong Wanxie. A precise integration method for response problems of nonlinear periodic systems. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2000, 21(2): 145～148(in Chinese))

LIE SERIES SOLUTION OF NONLINEAR DYNAMIC EQUATIONS AND IT'S APPLICATION*

Zhang Suying[1] Deng Zichen[1,2]

(1. *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

(2. *State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract By expanding the power series solution of differential equations and using the semiqroups theory of Linear Operators, we studied the integration method of nonlinear dynamic equations and obtained the so-called Lie series method, whose concrete implementation was discussed. The Lie series method can be used to construct high order explicit integrators, so it was used to solve the generalized Hamilton system and it can preserve the canonical property of the exact solution of the generalized Hamilton system. Numerical examples show the method's validity and effectiveness.

Key words nonlinear dynamic equation, Lie series, differential operator, the resolvent of the differential operator

Received 02 December 2003, revised 05 January 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10372084), HUO Ying-dong Youth Teacher Foundation (71005), the Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China (20010699016), the Open Foundation of State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment and the Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University.