

电磁对偶元伪解的消除

孙雁¹ 郑长良² 陈杰夫² 钟万颀^{1,2}

(1. 上海交通大学工程力学系, 上海 200030) (2. 大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘要 将频域电磁场的基本方程导向对偶方程形式, 并给出了推导电磁场有限元所需相应的对偶变量变分原理后, 变分原理被积函数可导向对于对偶变量为对称的形式. 对偶变量有限元推导可避免所谓的 C_1 连续性问题. 采用对偶变量离散分析了共振腔本征值问题, 离散后再消去一类变量就可导出普通的广义本征值问题而求解. 但因散度为零的方程是由变分来满足的, 而变分函数选择并未刻意排除散度非零的场, 故会出现很多本征值为零的伪解. 本文采用奇异值分解将全部伪解预先加以排除. 算例表明了排除伪解算法的有效性

关键词 电磁波, 对偶变量, 有限元, 共振腔, 本征值, 奇异值分解

电磁波的理论计算非常重要^[1]. 需要有电磁波导的分析, 还要有复杂形状的共振腔分析. 对此, 有限元方法是必要的. 共振腔分析当然是动态电磁场, 故有如结构振动问题, 有本征值问题的分析, 也可以在给定频率 ω 下做波传输的分析. 总之, 共振腔的有限元分析是很重要的环节.

电磁场的有限元分析已经有很多研究, 见文 [2]. 常见化到一类变量的变分原理再进行有限元离散的方法. 因此就像结构力学板弯曲问题的有限元一样, 有 C_1 连续性的困难. 采用对偶变量的有限元离散, 则因微分方程的阶次低, 不会出现 C_1 连续性的问题^[3]. 但仍出现许多与伪解对应的零本征值解, 本文采用奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 的方法, 可将全部零本征值的伪解排除出局.

数值例题表明, 方法是有效的.

1 频域列式, 变分原理与波导

Maxwell 方程是在时域列式的, 其频域列式可以表示为

$$H = h \cos \omega t = \operatorname{Re}[h e^{-i \omega t}], E = e \sin \omega t = \operatorname{Re}[i e e^{-i \omega t}] \quad (1)$$

其中电场 $e(x, y, z, \omega)$, 磁场 $h(x, y, z, \omega)$ 待求, 他们都是实型函数. 频域微分方程成为

$$\omega \mu h = R \cdot e, \omega \epsilon e = R \cdot h; \quad (2)$$

其中 μ 与 ϵ 分别为介磁与介电矩阵, 而

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial x & \partial/\partial y \\ \partial/\partial x & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

设有 V 区域(共振腔)的边界为 S , 理想导体的自然边界条件也可用变分原理表达, 为^[3,4]

$$\delta \left[\int_V (e, h) = \iiint [h^T \cdot (R \cdot e) - \mu_0 \omega h^T h / 2 - \omega e^T \epsilon e / 2] dx dy dz + \iint_S [e^T \cdot (n \times h)] dS, \delta \int \int = 0 \right] \quad (4)$$

其中向量 h 与 e 的各分量当成为独立的试函数. n 是边界外法线单位向量, μ_0 是真空的介磁常数.

2 共振腔的本征值问题

设共振腔的周边是导体, 并且在给定频率 ω 下, 有限元矩阵已将边界积分项也计算在内而成为自然边界条件, 于是得到的共振腔总体矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} -\omega M_{ee} & M_{eh} \\ M_{he} & -\omega M_{hh} \end{bmatrix}, \quad M_{eh} = M_{he}^T, M_{ee} = M_{ee}^T, M_{hh} = M_{hh}^T \quad (5)$$

矩阵的对称性是基本的一环, 与频率 ω 的关系已经显示. 运用分块矩阵 M_{eh}, M_{ee}, M_{hh} 与 ω , 将其离散后的泛函写为

2004-01-12 收到第一稿, 2004-02-20 收到修改稿.

* 国家重大基础研究资助项目(G1999032805), 国家自然科学基金资助项目(10372019, 10132010)以及教育部博士点基金资助项目(20010141024)

$$\prod_n (\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n) = -\omega \mathbf{e}_n^T \mathbf{M}_{ce} \mathbf{e}_n / 2 - \omega \mathbf{h}_n^T \mathbf{M}_{hh} \mathbf{h}_n / 2 + \mathbf{e}_n^T \mathbf{M}_{ch} \mathbf{h}_n, \delta \prod = 0 \quad (6)$$

因为是共振腔的本征值问题,不考虑外源,故没有一次项. $\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n$ 分别是离散后的节点电场与磁场组装而成的总体向量,可能维数不同. 从(4)的泛函看, $\mathbf{M}_{ce}, \mathbf{M}_{hh}$ 都是对称正定阵.

二次型(6)有二类变量. 将 \mathbf{h}_n 消去

$$\mathbf{h}_n = \omega^{-1} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc} \mathbf{e}_n \quad (7)$$

有 $\prod_n (\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n^T (\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc} - \omega^2 \mathbf{M}_{ce}) \mathbf{e}_n / 2 \omega$ (8) 即得到一类变量的泛函. 由此导出的本征值方程成为

$$(\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc} - \omega^2 \mathbf{M}_{ce}) \mathbf{e}_n = 0 \quad (9)$$

这是典型的广义本征值问题,就像结构力学的振动问题一样, $\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc}$ 相当于刚度阵,而 \mathbf{M}_{ce} 为质量阵,它肯定是正定的. \mathbf{M}_{hh} 阵也是正定的,所以 \mathbf{M}_{hh}^{-1} 肯定存在. 但 \mathbf{M}_{hc} 却未必满秩,因此 $\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc}$ 虽然对称但未必满秩. 于是就会出现许多零本征值,这些零本征值解是伪解,应予排除. 出现伪解的原因 $\text{div}(\mathbf{E})=0$ 是的方程是由变分原理来满足的. 但变分时的函数选择,并未刻意排除 $\text{div}(\mathbf{E}) \neq 0$ 的场. 其结果是交互阵 \mathbf{M}_{hc} 不满秩,就出现了零本征值. \mathbf{M}_{hc} 的缺秩数就是 ω^2 的零本征值数.

缺秩的 $n_h \times n_c$ 矩阵 \mathbf{M}_{hc} 很容易通过线性变换,将这些零本征值解全部排除出去. 方法之一是采用奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)^[5~8]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{hc} &= \mathbf{Q}_h \mathbf{D}_r \mathbf{Q}_c^T (= \mathbf{Q}_{ho} \mathbf{D}_{ro} \mathbf{Q}_{co}^T), \\ \mathbf{M}_{ch} &= \mathbf{Q}_c \mathbf{D}_r \mathbf{Q}_h^T (= \mathbf{Q}_{co} \mathbf{D}_{ro}^T \mathbf{Q}_{ho}^T) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 r 是 \mathbf{M}_{hc} 的秩, $\mathbf{D}_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$; \mathbf{Q}_{ho} 是 $n_h \times n_h$ 是正交阵, \mathbf{Q}_h 是从 \mathbf{Q}_{ho} 截取前 r 列而得的 $n_h \times r$ 阵; \mathbf{Q}_{co} 是 $n_c \times n_c$ 正交阵, \mathbf{Q}_c 是从 \mathbf{Q}_{co} 截取前 r 列而得的 $n_c \times r$ 阵.

这样,将(9)式改写为

$$[\mathbf{Q}_{co}^T (\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc} - \omega^2 \mathbf{M}_{ce}) \mathbf{Q}_{co}] (\mathbf{Q}_{co}^T \mathbf{e}_n) = 0 \quad (11)$$

因 $\mathbf{Q}_{co}^T (\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc}) \mathbf{Q}_{co} = (\mathbf{Q}_{co}^T \mathbf{M}_{ch} \mathbf{Q}_{ho}) (\mathbf{Q}_{ho}^T \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{Q}_{ho}) (\mathbf{Q}_{ho}^T \mathbf{M}_{hc} \mathbf{Q}_{co})$, 其中矩阵 $(\mathbf{Q}_{co}^T \mathbf{M}_{ch} \mathbf{Q}_{ho})$ 给出的 $n_c \times n_h$ 阵只在左上角有非零的正定对角矩阵 $\mathbf{D}_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, 其余为零. 亦即

$$(\mathbf{Q}_{co}^T \mathbf{M}_{ch} \mathbf{Q}_{ho}) = \mathbf{D}_r^T = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ (n_c - r) \end{matrix}$$

记对称正定阵 $\mathbf{M}'_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{ho}^T \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{Q}_{ho}$ 及 $\mathbf{M}'_c \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{co}^T \mathbf{M}_{ce} \mathbf{Q}_{co}$, $\mathbf{e}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{co}^T \mathbf{e}_n$, 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_r &= \mathbf{Q}_{co}^T (\mathbf{M}_{ch} \mathbf{M}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc}) \mathbf{Q}_{co} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}'_h & \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (12)$$

从而 n_c 维的对称阵本征值方程(11)成为

$$(\mathbf{K}'_r - \omega^2 \mathbf{M}'_c) \mathbf{e}' = 0 \quad (13)$$

该本征值问题 $(n_c - r)$ 个零本征值的本征向量为 $n_c \times (n_c - r)$ 矩阵 \mathbf{E}' 的列

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ (n_c - r) \end{matrix} \quad (14)$$

即单位阵的后 $(n_c - r)$ 个单位向量,它们就是伪解. 让这些多余的向量混在本征值问题中,不仅仅将徒然增加计算工作量,而且还可能干扰数值求解器. 还要寻求 r 个真本征解.

因方程(12), 刚度阵 \mathbf{K}'_r 的分块构造为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_r &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ (n_c - r) \end{matrix}, \\ \mathbf{e}' &= \begin{cases} \mathbf{e}'_r \\ \mathbf{e}'_2 \end{cases} \begin{matrix} r \\ (n_c - r) \end{matrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{相应地 } \mathbf{M}'_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_r & \mathbf{M}'_{12} \\ \mathbf{M}'_{12} & \mathbf{M}'_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ (n_c - r) \end{matrix}, \\ \mathbf{M}'_{12} &= \mathbf{M}'_{12}{}^T, \mathbf{M}'_{22} = \mathbf{M}'_{22}{}^T \end{aligned} \quad (16)$$

代入(13)式, 展开之有

$$\mathbf{K}'_r \mathbf{e}'_r - \omega^2 (\mathbf{M}'_r \mathbf{e}'_r + \mathbf{M}'_{12} \mathbf{e}'_2) = 0, \quad (17)$$

$$\omega^2 (\mathbf{M}'_{12} \mathbf{e}'_r + \mathbf{M}'_{22} \mathbf{e}'_2) = 0 \quad (18)$$

从(18)式, 有

$$\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{M}'_{22}{}^{-1} \cdot \mathbf{M}'_{21} \mathbf{e}'_r \quad (19)$$

并代入(17), 有

$$\mathbf{K}'_r \mathbf{e}'_r - \omega^2 (\mathbf{M}'_r - \mathbf{M}'_{12} \mathbf{M}'_{22}{}^{-1} \cdot \mathbf{M}'_{21}) \cdot \mathbf{e}'_r = 0 \quad (20)$$

这就是 r 维的广义本征值问题. 矩阵 \mathbf{K}'_r 与 $(\mathbf{M}'_r - \mathbf{M}'_{12} \mathbf{M}'_{22}{}^{-1} \cdot \mathbf{M}'_{21})$ 都是对称正定的. 可以用标准的本征值求解器求解. 因矩阵 \mathbf{M}'_r 是对称正定的, 其任一个对角子矩阵一定也对称正定, 故 $\mathbf{M}'_{22}{}^{-1}$ 必然可以求逆, 而且 $(\mathbf{M}'_r - \mathbf{M}'_{12} \mathbf{M}'_{22}{}^{-1} \cdot \mathbf{M}'_{21})$ 也一定对称正定.

3 平面有限元的共振腔

以上推导适用于三维问题,自然也适用于二维问题.此时边界积分项成为线积分.对单元的直线边界,设其自然右手坐标为 n, s, z ,其中 n 是外法线方向, s 是边界直线的方向.设单元场由节点向量线性插值而成,记 i 号节点的向量为 $e_i = \{e_{ni}, e_{si}, e_{zi}\}^T$, $h_i = \{h_{ni}, h_{si}, h_{zi}\}^T$.线性插值可保证单元间的场协调.从而 $e^T \cdot (n \times h) = \{e_n, e_s, e_z\} \cdot \{0, -h_z, h_s\}^T = e_z h_s - e_s h_z$,其中各分量由单元节点向量线性插值而成.故 $e^T \cdot (n \times h)$ 是切向坐标 s 的二次函数,容易做

出积分.显然,边界线段的积分对电场与磁场是双线性的.至于域内积分可按常规有限元法执行.

4 数值算例

算例 1 考虑一个 $1\text{cm} \times 0.5\text{cm} \times 0.75\text{cm}$ 的矩形腔体的本征值问题.表1给出了该共振腔本征值问题的解析解以及依据本文列式,在粗细不同的网格划分下的计算结果,并同时列出棱边元的计算结果^[9]作为比较.(本算例及以下算例中,均取介电矩阵 $\epsilon = \epsilon I_{3 \times 3}$, $\epsilon = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$,介磁矩阵 $\mu = \mu_0 I_{3 \times 3}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$)

表 1 矩形共振腔的部分本征值 $k_0(\text{cm}^{-1})$ 计算结果及比较

Table 1 Comparison of part of the eigenvalues $k_0(\text{cm}^{-1})$ of a rectangular cavity

mode	the results of 24 hexahedral simplectic elements	the results of 192 hexahedral simplectic elements	analytic solution	the results of edge-based tetrahedral elements with 260 unknown quantities	the results of 270 edge-based hexahedral elements
TE ₁₀₁	5.206	5.234	5.236	5.213	5.307
TM ₁₁₀	6.769	7.012	7.025	6.977	7.182
TE ₀₁₁	7.299	7.539	7.531	7.474	7.725
TE ₂₀₁	7.299	7.539	7.531	7.573	7.767
TM ₁₁₁	7.604	8.167	8.179	7.991	8.350
TE ₁₁₁	7.769	8.167	8.179	8.122	8.350
TM ₂₁₀	7.944	8.866	8.886	8.572	9.151
TE ₁₀₂	8.485	8.887	8.947	8.795	9.428

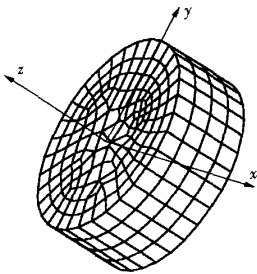


图 1 圆柱型谐振腔及其网络划分

Fig. 1 Cylindrical resonator and its mesh subdivision

算例 2 考虑一个底面半径为 0.5cm ,高为 0.5cm 的圆柱形谐振腔体,如图1.两种网格辛单元计算结果、棱边基四面体单元^[9]数值解及解析无列于表2.两种单元的数值解的相对误差也在表中列出以示比较.可见在较为稀疏的网格下,对于前几阶模态,辛单元已给出较为满意的解答;随着网格加密,计算精度明显提高,在相当的网格条件下,辛单元的结果总体优于棱边元.

在以上两个算例中不采用SVD进行处理,辛单元分析均发现有与域内单元节点数目相等的零本征解,即伪解.采用SVD处理后,所有零本征解均被剔除,而非零本征解与不采用SVD处理没有任何改变.说明采用SVD方法可以有效地消除辛单元在电磁场分析中所产生的伪解,而不影响其自身精度.

表 2 圆柱型谐振腔体的本征值 $k_0(\text{cm}^{-1})$ 计算结果及比较Table 2 Comparison of the eigenvalues $k_0(\text{cm}^{-1})$ of a cylindrical resonator

mode	the results of 27 hexahedral symplectic elements and the relative error/%		the results of 332 hexahedral symplectic elements and the relative error/%		the results of 380 edge-based tetrahedral elements and the relative error/%		analytic solution
TM ₀₁₀	4.837	0.56	4.810	0.00	4.809	-0.02	4.810
TM ₁₁₁	7.362	1.08	7.230	-0.73	7.202	-1.11	7.283
	7.387	1.43	7.275	-0.11	7.288	0.07	
TM ₁₁₀	7.355	3.86	7.626	-0.31	7.633	-0.22	7.650
	7.720	0.92	7.671	0.27	7.724	0.97	
TM ₀₁₁	8.057	2.77	7.890	0.64	7.940	1.28	7.840
TM ₂₁₁	7.361	-14.98	8.629	-0.33	8.697	0.45	8.658
	7.703	-11.03	8.779	1.40	8.865	2.39	

5 结束语

电磁波的有限元分析是非常重要的课题。专著 [2] 给出的电磁有限元分析采用了一类变量的列式, 有 C_1 连续性的困难。针对此问题, 本文指出, 应采用对偶变量变分原理, 运用对偶变量的有限元离散, 这样就不会出现 C_1 连续性的困难了。这对于电磁波的有限元分析是很有利的。但还应注意将零本征值的伪解预先加以消除。本文例题表明, 采用对偶变量的有限元离散再运用奇异值分解的方法是有效的, 给出的数值结果是逼近于真实解的。

参 考 文 献

- 1 Ramo S, Whinnery JR, Van Duzer Th. Fields and waves in communication electronics. 2nd ed. NY: J Wiley & Sons, 1984
- 2 金建铭. 电磁场有限元方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998 (Jianming Jin. The Finite Element Method in Electromagnetics. Xi'an: Xidian university Press, 1998)
- 3 钟万勰, 孙雁. 电磁共振腔辛有限元法. 计算力学学报, 2004, 21(2): 129~134 (Zhong WX, Sun Y. Symplectic

finite element method for electromagnetic resonant cavity. *Journal of Computational Mechanics*, 2004, 21(2): 129~134 (in Chinese))

- 4 钟万勰. 电磁波导的辛体系. 大连理工大学学报, 2001, 41(4): 379~387 (Zhong WX. Symplectic theory of electromagnetic wave guide. *J of Dalian University of technology*, 2001, 41(4): 379~387 (in Chinese))
- 5 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002 (Zhong WX. Duality system in applied mechanics. Beijing: Science Press; 2002 (in Chinese))
- 6 Green M, Limebeer D J N. Linear robust control. NJ: Prentice-Hall, 1995
- 7 Golub GH, Van Loan CF. Matrix computation. Baltimore: Johns Hopkins Univ Press, 1983
- 8 Press WH, Teutolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. Numerical Recipes in C. London: Cambridge Univ Press, 1992
- 9 Jin Jianming. The Finite Element Method in Electromagnetics. 2nd ed. NY: J Wiley & Sons, 2002
- 10 钟万勰. 电磁波导的半解析辛分析. 力学学报, 2003, 35(4): 401~410 (Zhong WX. Symplectic Semi-analytical method for Electro-magnetic wave guide. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(4): 401~410

ON THE ELIMINATION OF SPURIOUS SOLUTIONS USING SYMPLECTIC FINITE ELEMENT METHOD FOR ELECTROMAGNETIC ANALYSIS*

SUN Yan¹ ZHENG Changliang² Chen Jiefu² ZHONG Wanxie^{1,2}

(1. *Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China*)

(2. *Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

Abstract The fundamental equations of electromagnetic field were written in the form of duality system, and the variational principle for dual variables was derived for electromagnetic finite element method. To maintain the symplectic conservation conditions of FEM formulation, the integrand was rewritten symmetrically for duality variables, and the boundary integral terms of variational principle were cancelled mutually for the adjacent elements. The dual variable FEM formulation can avoid the difficulty of C_1 continuity condition. The FEM analysis for dual variables was applied to solve the eigenproblems of resonant cavity, and the generalized eigenvalues were solved numerically. In order to eliminate the spurious solutions owing to the violation of zero-divergence requirement in each element, the singular value decomposition (SVD) technique was employed, and the numerical results demonstrated the effectiveness of the method.

Key words electromagnetic, duality system, finite element, resonance cavity, eigenvalue, singular value decomposition

Received 12 January 2004, revised 20 February 2004.

* The project supported by the National Key Basic Research Foundation (G1999032805); the National Natural Science Foundation of China (10372019, 10132010); the Doctoral Point Foundation of Education Ministry in China (20010141024)