

厚壁圆筒在热、磁耦合场作用下的动态响应

戴宏亮¹ 戴庆华²

(1. 上海交通大学建筑工程与力学学院, 上海 200240)

(2. 长沙航空职业技术学院, 长沙 410014)

摘要 运用力学和电磁场的知识对厚壁圆筒结构建立平衡方程, 并通过 Laplace 和 Hankel 积分变换对物理方程进行变换, 得到一个可解的方程形式. 提出一种解析方法求解在热磁冲击作用下厚壁圆筒的动应力和磁场矢量扰动, 得到柱体内动应力响应历程和分布规律及磁场矢量扰动的响应历程和分布规律. 实例计算表明该方法是简单、有效的, 并给出了一些有实际意义的结果.

关键词 厚壁圆筒, 动态响应, 磁场矢量扰动

引言

在现代科技中, 热、磁耦合场引起的动态问题是一个非常重要的研究方向. 例如澳大利亚研究出的电磁枪——金属风暴, 美国研究的新一代防空武器电磁炮属于这一研究领域. 由于在磁存储、磁结构、地球物理学、离子物理学和相关磁弹性测量技术等方面的工程应用, 使得人们越来越关注这一领域.

目前有关弹性固体结构的动态变形场与电磁场的瞬态耦合作用的研究大多限于热载荷引起的变形场与电磁场的瞬态耦合响应作用^[1~3]. 文献[4]利用 Laplace 变换求解了圆柱体的热冲击问题. 但热荷载函数是利用问题的初始条件来表示的, 这样就限制了热荷载只能是与时间无关的脉冲函数, 从而失去一般性, 也没有详细讨论热动应力集中现象和磁场矢量扰动. 文献[5]中利用了 Hankle 变换解出位移的解析解, 但它没有讨论磁场矢量的扰动变换, 只是简单的讨论了应力的响应历程. Hata. T^[3]运用 Laplace 变换去解决热应力及温度的分配问题, 提出一种在有规律振动的电磁场里获得电磁场, 温度场和机械应力的分析方法. 到目前为止, 研究方向主要集中在热磁场中的无限大结构体, 而有限大结构还很少被涉及.

本文建立了电磁枪、炮的身管结构的热、磁弹性动力学的分析模型. 在热、磁弹性运动平衡方程中考虑了惯性效应和磁场中的 Lorentz 力的影响. 利用满足非齐次边界条件的准静态解和满足齐次边界条件的非齐次动态方程解的叠加的方法, 容易地求得厚壁

圆筒磁弹性动态响应问题的解析解. 在求解过程中, 利用相应的有限 Hankel^[6]变换和 Laplace 变换, 以及它们的反变换, 求得动应力和磁场矢量扰动的解析式. 得到柱体内动应力响应历程和分布规律及磁场扰动的响应历程和分布规律.

1 基本方程和求解方法

内径为 a , 外径为 b 的有限长均匀导电圆筒, 处于均匀静磁场 $\vec{H}(0, 0, H_z)$ 中. 运用电磁场知识推导可知, 当圆筒发生变形运动时, 导体内外电磁场均发生扰动, 同时, 扰动的电磁场又影响圆筒变形运动. 这样, 在圆柱体内部将会发生圆筒变形运动和磁场扰动的耦合.

假设圆筒的磁导率 μ , 与真空中的磁导率相等. 在忽略位移电流的情况下, Maxwell 场方程为

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{h}, \nabla \times \vec{e} = -\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \nabla \cdot \vec{h} = 0$$

$$\vec{e} = -\mu \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H} \right), \vec{h} = \nabla \times (\vec{U} \times \vec{H}) \quad (1)$$

将初始磁场 $\vec{H}(0, 0, H_z)$ 用圆柱坐标系 (r, θ, z) 代入方程(1)可得

$$\vec{U} = (u(r, t), 0, 0), \vec{e} = -\mu \left(0, H_z \frac{\partial u}{\partial t}, 0 \right),$$

$$\vec{H}_z = (0, 0, h_z), \vec{J} = - \left(0, \frac{\partial h_z}{\partial t}, 0 \right),$$

$$h_z = -H_z \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (2)$$

圆柱坐标系下, 几何方程为

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_z = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (4)$$

其中 $\sigma_r(r, t)$ 和 $\sigma_\theta(r, t)$ 分别表示径向和环向应力分量, ρ 是质量密度, f_z 为电磁力, 其表达式为

$$f_z = \mu(\mathbf{J} \times \mathbf{H}) = \mu H_z^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (5)$$

满足边界条件和初始条件为

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a} = 0 \quad \sigma_r(r, t)|_{r=b} = 0 \quad (6a)$$

$$u(r, t)|_{t=0} = u_0(r) \quad \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(r) \quad (6b)$$

利用物理关系和几何关系, 我们可以得到热、磁动应力的表达式为

$$\sigma_r(r, t) = (\lambda + 2G) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} U - \frac{E\alpha}{1-2\nu} T(r, t) \quad (7a)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = (\lambda + 2G) \frac{U}{r} + \lambda \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} T(r, t) \quad (7b)$$

上式中 $U(r, t)$ 表示径向位移, r 和 t 分别为径向坐标和时间变量. 其中, λ 和 G 是 Lamé's 常数, 最终得到热磁动力学平衡方程为

$$\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U(r, t) = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} + \frac{E\alpha}{(1-2\nu)B} T(r, t) \quad (8)$$

其中 $B = \lambda + 2G + \mu H_z^2$, 热磁弹性波速度 $C_L = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, 这里的 $C_1 = \sqrt{(\lambda - 2G)/\rho}$ 是弹性波速度, $C_2 = \sqrt{\mu H_z^2/\rho}$ 是磁场干涉波速度.

设运动平衡方程(8)的解 $u(r, t)$ 为一个满足非齐次边界条件的齐次准静态方程的解 $u_s(r, t)$ 和一个满足齐次边界条件的非齐次动态方程的解 $u_d(r, t)$ 的叠加. 即

$$u(r, t) = u_s(r, t) + u_d(r, t) \quad (9)$$

其中准静态解 $u_s(r, t)$ 必须满足下式

$$\frac{\partial^2 U_s(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_s(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_s(r, t) = \frac{E\alpha}{(1-2\nu)B} T(r, t) \quad (10)$$

利用满足边界条件(6a), 解式(10)得

$$U_s = \frac{E\alpha}{(1-2\nu)B} \int_a^r r T(r, t) dr + B_1 r + \frac{B_2}{r} \quad (11)$$

其中

$$B_1 = \frac{E\alpha}{(b^2 - a^2)B} \int_a^b r T(r, t) dr, \quad (12)$$

$$B_2 = \frac{E\alpha a^2}{(1-2\nu)(b^2 - a^2)B} \int_a^b r T(r, t) dr$$

将(11)代入(10), 并代入平衡方程(9)和边界条件及初始条件(6a)和(6b)可得

$$\frac{\partial^2 U_d(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_d(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_d(r, t) = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} \quad (13a)$$

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a} = 0, \sigma_r(r, t)|_{r=b} = 0 \quad (13b)$$

$$u_d(r, t)|_{t=0} + u_s(r, t)|_{t=0} = u_0(r), \quad \frac{\partial u_d(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial u_s(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(r) \quad (13c)$$

方程(13a)是贝塞尔方程, 我们需要先求它的特征方程. 假定准静态解为零. 设方程的解为 $u_d(r, t) = f_n(r) \exp(i\omega_n t)$, 代入方程(13a)得

$$\frac{d^2 f_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n(r)}{dr} + \left(k_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) f_n(r) = 0 \quad (14)$$

运用 Bessel 函数求解知识可设

$$f_n(r) = A_n J_1(k_n r) + B_n Y_1(k_n r) \quad (15)$$

式(15)中的 $J_1(kr)$ 和 $Y_1(kr)$ 分别是第一类和第二类的一阶 Bessel 函数. 将式(15)代入式(14b)得

$$J_a Y_b - J_b Y_a = 0 \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} J_a &= k J_1(ka) + h_a J_1(ka) \\ J_b &= k J_1(kb) + h_b J_1(kb) \\ Y_a &= k Y_1(ka) + h_a Y_1(ka) \\ Y_b &= k Y_1(kb) + h_b Y_1(kb) \\ h_a &= \lambda / [a(\lambda + 2G)] \\ h_b &= \lambda / [b(\lambda + 2G)] \end{aligned} \quad (17)$$

k_n 为方程的特征根, 故可以求出圆柱体的固有频率.

我们定义 Hankel 变换

$$\bar{U}_d = H[U_d] = \int_a^b r U_d [J_1(k, r) Y_a - Y_1(k, r) J_a] dr \quad (18)$$

其反变换为

$$U_d = \sum \frac{\bar{U}_d}{F(k_i)} [J_1(k_i, r) Y_a - Y_1(k_i, r) J_a] \quad (19)$$

其中

$$F(k_i) = \frac{J_a^2}{J_b^2} \frac{2}{k_i^2 \pi^2} \left\{ h_b^2 + k_i^2 \left[1 - \left(\frac{1}{k_i b} \right)^2 \right] \right\} - \frac{2}{k_i \pi^2} \left\{ h_a^2 + k_i^2 \left[1 - \left(\frac{1}{k_i a} \right)^2 \right] \right\} \quad (20)$$

以上详细推导见文献[6].

由此,我们得到动态解的表达式可以写成式(19)的形式,只需要将相应的系数 $U_d(k,t)$ 求出即可. 因此,我们对式(13a)进行 Hankel 变换得

$$-k^2 \bar{U}_d(k,t) = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial t^2} \quad (21)$$

先对(21)两边进行 Laplace 变换,然后再进行 Laplace 反变换得

$$\begin{aligned} \bar{U}_d(k,t) = & -\bar{U}_s(k,t) + kC_L \int_0^t \bar{U}_s(k,\tau) \cdot \\ & \sin[kC_L(t-\tau)] \partial \tau + \bar{U}_0(k) \cos(kC_L t) + \\ & \frac{\bar{V}_0(k)}{\xi C_L} \sin(kC_L t) \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\bar{U}_s(k,t) = H[U_s(r,t)]$, $\bar{U}_0(k) = H[U_0(r)]$, $\bar{V}_0(k) = H[V_0(r)]$.

最后,我们可以得到整个问题的解析解

$$U = \frac{Ea}{(1-2\nu)Br} \int_0^r r T(r,t) \partial r + B_1 r + \frac{B_2}{r}$$

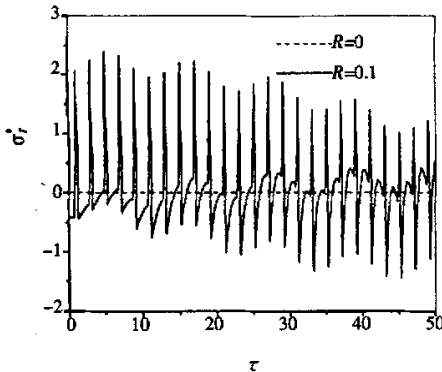


图1 R=0,0.1处的径向应力响应历程及分布规律
Fig.1 Response histories and distributions of radial stress, where R=0,0.1

$$\sum \frac{U_d}{F(k)} [J_1(kr)Y_0 - Y_1(kr)J_0] \quad (23)$$

将式(23)代入方程(7)和方程(2)中的最后一式,可得相应的磁弹性动态应力 σ_r, σ_θ 和磁场矢量扰动 h_z .

2 算例与讨论

在实例计算中,选取材料参数: $\lambda=138 \text{ GPa}, G=44.8 \text{ GPa}, \rho=4390 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, 磁场干涉波速 $C_2=500 \text{ (m/s)}$. 在两个实例中取 $a=0.01 \text{ m}, b=0.02 \text{ m}$, 设温度函数为 $T=T_0 e^{-\beta r}$, 在求解时,设 $R = \frac{r-a}{b-a}, \tau = \frac{tC_L}{(b-a)}$, 将所有的量进行无量纲 $\sigma_r^*(r,t) = \frac{\sigma_r(r,t)}{E_0 \alpha_0 T_0}, \sigma_\theta^*(r,t) = \frac{\sigma_\theta(r,t)}{E_0 \alpha_0 T_0}, h_z^*(r,t) = \frac{h_z(r,t)}{a_0 T_0 H_z}$.

实例1 令 $\beta=0$,此时为非衰减函数.

从图1,2可以看出,在 $R=0, 0.5$ 时,径向应力随着时间出现有规律的周期振荡,并在 $\tau=1, 3, 5, 7, \dots$ 时出现峰值. 在 $R=0$ 和 $R=1$ 时,径向应力

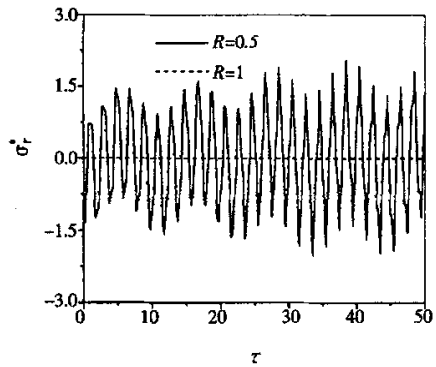


图2 R=0.5,1处的径向应力响应历程及分布规律
Fig.2 Response histories and distributions of radial stress, where R=0.5,1

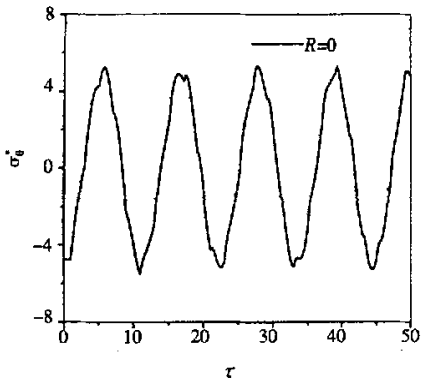


图3 R=0处的环向应力响应历程及分布规律
Fig.3 Response histories and distributions of circumferential stress, where R=0

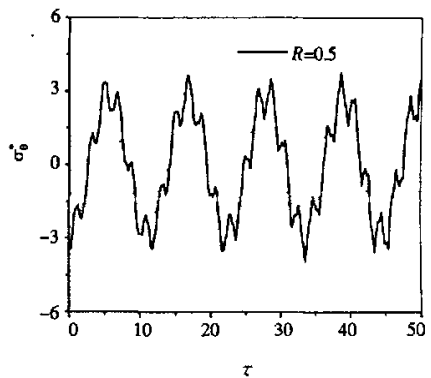


图4 R=0.5处的环向应力响应历程及分布规律
Fig.4 Response histories and distributions of circumferential stress, where R=0.5

满足给定的边界条件,随着 R 的增大,应力由拉应力逐渐变为以压应力为主. 根据材料性质不同,应对危险点出现位置进行分段考虑,来判定结构可能出现的破坏区域.

$R=0.5$ 从图 3, 4 和 5 看出 σ_θ^* 随着时间的增长,出现有规律的周期振荡,并且这种图象是一种振

荡波形且应力循环属于一种极规则的对称循环. 在相同时间点,随着 R 的增加, σ_θ^* 减小,且图象出现分岔现象. 当 R 增加到一定程度时,分岔慢慢消失. 从图 3 至图 5 我们可以看到,随时间的变化 σ_θ^* 的循环特征是一种近似的对称循环,且 σ_θ^* 随着半径的变化是逐渐减小的,所以危险点应出现在内边界上.

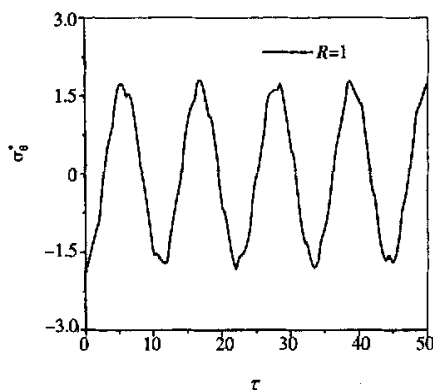


图 5 $R=1$ 处的环向动应力响应历程及分布规律
Fig. 5 Response histories and distributions of circumferential stress, where $R=1$

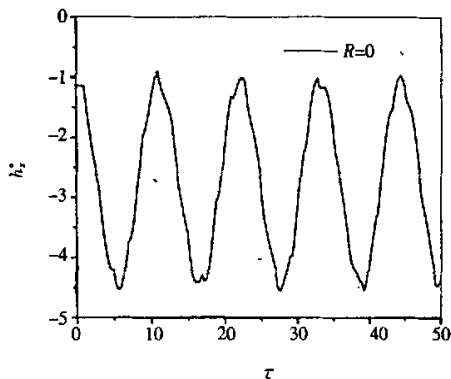


图 6 $R=0$ 处的磁场矢量扰动响应历程及分布规律
Fig. 6 Perturbation response histories of magnetic field vector, where $R=0$

从图 6 至图 8 看到 H_z^* 与 σ_θ^* 的图象走势有相似的地方,是一种振荡波形,随半径的增大图象由规则变为不规则,再到规则,且峰值都随时间变化不

大. 但磁场矢量扰动在一负值附近振荡,且随 R 的增加而振荡的数值范围变小.

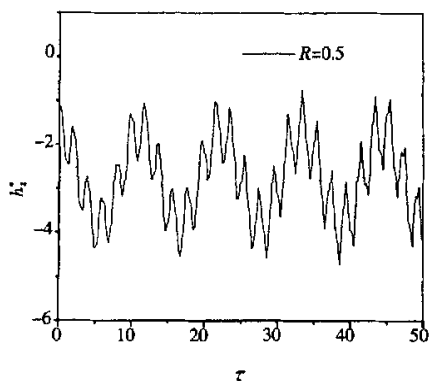


图 7 $R=0.5$ 处的磁场矢量扰动响应历程及分布规律
Fig. 7 Perturbation response histories of magnetic field vector, where $R=0.5$

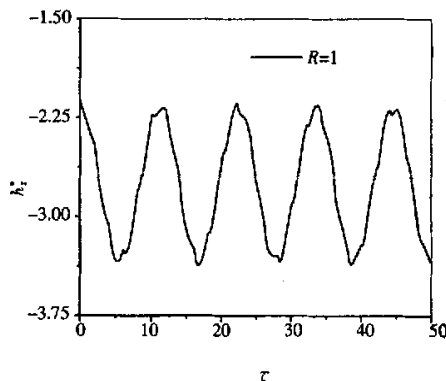


图 8 $R=1$ 处的磁场矢量扰动响应历程及分布规律
Fig. 8 Perturbation response histories of magnetic field vector, where $R=1$

实例 2 β 不等于零时为衰减函数, $T=T_0 e^{-\beta t}$, 取 $\beta=1000$. 方程(7)变为

$$\sigma_r(r, t) = \frac{E\alpha T_0(1-\nu)}{(1-2\nu)} \sum_i \left[\frac{\bar{U}_{ib}}{F(\xi_i)} \right].$$

$$\left[\frac{\partial B_1(\xi_i, r)}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{B_1(\xi_i, r)}{r} \right] M \quad (24a)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{E\alpha T_0(1-\nu)}{(1-2\nu)} \sum_i \left[\frac{\bar{U}_{ib}}{F(\xi_i)} \right].$$

$$\left[\frac{B_1(\xi, r)}{r} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{\partial B_1(\xi, r)}{\partial r} \right] M \quad (24b)$$

这里

$$M = e^{-1000\tau} + \frac{1000\xi_i c_i}{10^6 + (\xi_i c_i)^2} \cdot \left[\sin(\xi_i c_i t) + \frac{\xi_i c_i}{1000} (e^{-1000\tau} - \cos(\xi_i c_i t)) \right]$$

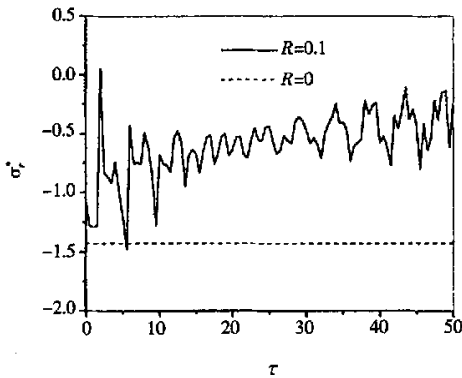


图9 $R=0, 0.1$ 处的径向动应力响应历程及分布规律
Fig. 9 Response histories and distributions of radial stress, where $R=0, 0.1$

载荷, 便于数值计算, 方法简单, 有效。

2) 应力波在外边界和中心之间不停地传播, 在中心的附近, 由于应力波的叠加, 使应力的峰值产生集聚, 从而可以产生比静应力大许多的动应力峰值。这也能证明一些器件在静应力下绝对安全, 但是在热冲击或其他的情况下, 由于产生动应力集中而使其遭到破坏的现象提供一些理论上的指导。

3) 磁场矢量扰动响应历程的模式随着结构内的位置不同而有所不同, 从计算结果中可以看出, 一个磁弹性结构在动载荷作用下, 除了在结构内引起交变应力的响应外, 还将引起结构内磁场矢量扰动响应。参照图示结构内磁场矢量扰动响应历程与结构内交变应力响应历程的关联不但可以为电磁枪、炮的发射管设计提供定量分析方法, 还可以为磁弹性测量技术提供一定的理论参考依据。

参考文献

1 Ezzat Magdy A. Generation of generalized

由于随时间的推移, $T = T_0 \times \exp(-1000 \times t)$ 趋近于零, $\sigma_r(r, t), \sigma_\theta(r, t)$ 都近似等于零。具体情况见下图。由图 9 和图 10 可以清楚的看到衰减项对应力影响。

3 结论

1) 本文提供的方法不须积分变换, 适宜各种热

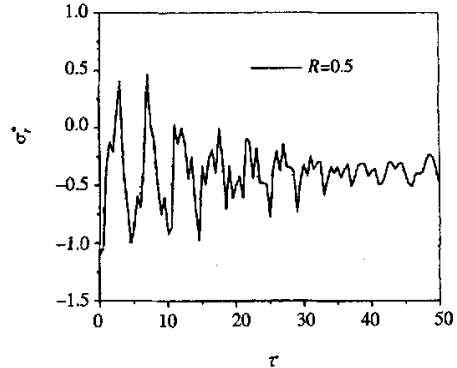


图10 $R=0.5$ 处的径向动应力响应历程及分布规律
Fig. 10 Response histories and distributions of radial stress, where $R=0.5$

magnetoelastostatic waves by thermal shock in a perfectly conducting half-space. *Journal of Thermal Stresses*, 1997, 20: 617

- 2 Wang X, Lu G, Guillo SR. Magnetoelastostatic stress and perturbation of magnetic field vector in a solid cylinder. *Journal of Thermal Stresses*, 2002, 25(10): 909~926
- 3 Hata T. Analysis of stress-focusing effect of magnetoelastostatic waves in a perfectly conducting solid cylinder. *JSME(Japanese) Part A*, 1996, 62: 2104
- 4 徐耀玲, 沈艳芝, 白象忠. 无限长导电圆柱体的磁弹性振动. *振动与冲击*, 1999, 18: 52~55 (Xu YL, Shen YZ, Bai XZ. The Vibration of magneto-elastic in an infinite long piezoelectric cylinder. *Vibration and Shock*, 1999, 18: 52~55 (in Chinese))
- 5 Wang X, Gong YN. A theoretical solution for axially symmetric problem in elastodynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(3): 275~282
- 6 Cinelli G. An extension of the finite Hankel transform and applications. *Inter J Eng Sci*, 1965, 3: 539~559

THE DYNAMIC RESPONSES OF THICK-WALLED CYLINDERS UNDER THE COUPLING OF TEMPERATURE FIELD AND MAGNETIC FIELD

Dai Hongliang¹ Dai Qinghua²

(1. *Department of Engineering Mechanics, The School of Civil Engineering and Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China*)

(2. *Changsha Aeronautical Vocational and Technical College, Changsha 410012, China*)

Abstract First, the knowledge of mechanics and electromagnetics was applied to build the equilibrium equation of thick-walled cylinders' structures, and a solvable equation was obtained utilizing the Laplace transforms and the Hankel integral transforms. Then, we presented an analytical method to solve the dynamic stresses and perturbation of magnetic field vector under thermomagnetic shock, and obtained the response histories and distributions of the dynamic stresses and the response histories of perturbation of magnetic field vector. Finally, some practical examples were used to test the method, and it proved that the method was simple and effective.

Keywords thick-walled cylinder, dynamic response, perturbation of magnetic field vector