

变厚度智能硬夹心板振动分析

胡宁宁, 张永发

(北京理工大学理学院力学系, 北京 100081)

摘要 研究由形状记忆合金与普通钢材制成的硬夹心板的振动控制方法, 求出硬夹心夹层板的平衡方程, 并分析了变厚度智能夹心板的振动问题. 算例表明该方法对于夹心板的振动能够有效地控制.

关键词 简支, 变厚度, 硬夹心夹层板, 形状记忆合金

引言

形状记忆合金(SMA)日渐在各领域中得到了广泛的应用, 它的特点是具有形状记忆效应^[1]. 按马氏体相变的定义, 由物理图像考虑, 相变及逆相变时规则地迁动, 则只要形成单变体马氏体, 并排除其他阻力, 材料通过马氏体相变及其逆相变, 就会呈现形状记忆效应^[2]. SMA材料在马氏体和奥氏体情况下的弹性模量是不相同的, 因此弹性模量是马氏体含量的函数. 含形状记忆合金纤维的复合材料层合板^[3]及具有不等厚表层的硬夹心双曲夹层扁壳^[4]已作了研究, 本文利用SMA的形状记忆效应, 对形状记忆合金层合板通过控制马氏体的含量来控制结构的振动, 将振幅控制在一定的范围之内.

1 平衡方程的推导

图1表示具有不等厚表层的各向同性的矩形夹

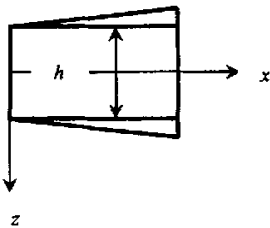


图1 变厚度智能硬夹心板示意图

Fig.1 Schematic diagram of changed thickness smart hard-sandwich plate

层板, 其夹心为硬夹心. 用“+”表示; z 向坐标为正的一侧为内表层, 用“+”表示; 另一侧为外表层, 用“-”

表示; 本文以 1, 2, 3 分别表示 x, y, z 方向的分量.

本文采用下述假定: ①内外表层为形状记忆合金薄板; ②不可忽略硬夹心处的内力, 弯矩及扭矩; $N_1^+, N_2^+, M_1^+, M_2^+, M_{12}^+, T^+$; ③表层板各向同性. 夹心中假定 $\epsilon_3^+ = 0, \sigma_3^+ = 0$. 4 内外表层泊松比相同. 上述假定通常不会影响工程应用中的精度要求.

内力与应变的关系为

$$\begin{aligned} N_1^+ &= B(\epsilon_1^+ + \mu\epsilon_2^+), & N_2^+ &= B(\epsilon_2^+ + \mu\epsilon_1^+) \\ N_1^- &= B(\epsilon_1^- + \mu\epsilon_2^-), & T^+ &= (1-\mu)B\epsilon_{12}^+/2 \\ M_1^+ &= -D(\chi_1^+ + \mu\chi_2^+), & T^- &= (1-\mu)B\epsilon_{12}^-/2 \\ M_2^+ &= -D(\chi_2^+ + \mu\chi_1^+), & M_{12}^+ &= -(1-\mu)D\chi_{12}^+ \\ M_2^- &= -D(\chi_2^- + \mu\chi_1^-), & N_2^- &= B(\epsilon_2^- + \mu\epsilon_1^-) \\ N_1^c &= B_c(\epsilon_1^c + \mu_c\epsilon_2^c), & N_2^c &= B_c(\epsilon_2^c + \mu_c\epsilon_1^c) \\ M_1^- &= -D(\chi_1^- + \mu\chi_2^-), & T^c &= (1-\mu_c)B_c\epsilon_{12}^c/2 \\ M_1^c &= -D_c(\chi_1^c + \mu_c\chi_2^c), & M_{12}^- &= -(1-\mu)D\chi_{12}^- \\ M_2^c &= -D_c(\chi_2^c + \mu_c\chi_1^c), & M_{12}^c &= -(1-\mu_c)D_c\chi_{12}^c \end{aligned}$$

其中刚度系数 B, B_c 及弯曲刚度 D, D_c 分别为

$$\begin{aligned} B &= \frac{Et}{1-\mu^2}, & D &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}, \\ B_c &= \frac{E_c h}{1-\mu_c^2}, & D_c &= \frac{E_c h^3}{12(1-\mu_c^2)} \end{aligned}$$

应变与位移关系为

$$\begin{aligned} \epsilon_1^+ &= u_x^+ & \epsilon_2^+ &= v_y^+ & \epsilon_{12}^+ &= v_x^+ + u_y^+ \\ \chi_1^+ &= w_{xx}^+ & \chi_2^+ &= w_{yy}^+ & \chi_{12}^+ &= w_{xy}^+ \\ \epsilon_1^- &= u_x^- & \epsilon_2^- &= v_y^- & \epsilon_{12}^- &= v_x^- + u_y^- \\ \chi_1^- &= w_{xx}^- & \chi_2^- &= w_{yy}^- & \chi_{12}^- &= w_{xy}^- \\ \epsilon_1^c &= u_x^c & \epsilon_2^c &= v_y^c & \epsilon_{12}^c &= v_x^c + u_y^c \\ \chi_1^c &= w_{xx}^c & \chi_2^c &= w_{yy}^c & \chi_{12}^c &= w_{xy}^c \\ w^+ &= w^- = w^c = w \end{aligned}$$

其中 $u^+, v^+, w^+, u^-, v^-, w^-, u^c, v^c, w^c$ 分别为内(外,夹心)层中面沿 x, y, z 方向位移.

$$\begin{aligned} u^+ &= -\frac{h+t}{2}\alpha, & v^+ &= -\frac{h+t}{2}\beta, \\ u^- &= \frac{h+t}{2}\alpha, & v^- &= \frac{h+t}{2}\beta, \\ \alpha &= \frac{u^- - u^+}{h+t}, & \beta &= \frac{v^- - v^+}{h+t}. \end{aligned}$$

其中 α, β 分别为上下表层中面上对应点的连线在板变形后的转角,它们分别在 xoz 及 yoz 面内转动,如果从正 x 轴向或正 y 轴向转向正 z 轴向,则定为正值.

夹层板的广义变分表达式为

$$\delta V = \delta V^+ + \delta V^- + \delta V^c = 0$$

经变分运算,得到了以 F, Φ, W 表示的 2 个基本方程

$$(2D + D_c) \nabla^4 w + \frac{G_c(h+t)^2}{h} (\Phi - \nabla^2 w) - P = 0 \quad (1)$$

$$\frac{B}{2} \nabla^2 \Phi - \frac{G_c}{h} (\Phi - \nabla^2 w) = 0 \quad (2)$$

其中 $G_c = \frac{E_c}{2(1+\mu_c)}$ 为剪切弹性模量.

2 求解固有频率

2.1 自由振动微分方程

将位移函数设为如下三角级数形式

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \omega_{mn} t_1 + B_{mn} \sin \omega_{mn} t_1) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

$$\alpha(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{mn} \cos \omega_{mn} t_1 + D_{mn} \sin \omega_{mn} t_1) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

$$\beta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (E_{mn} \cos \omega_{mn} t_1 + F_{mn} \sin \omega_{mn} t_1) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

其中 m 和 n 为任意正整数. 将上述三式代入(1),(2)式可得振动微分方程.

当矩形夹层板的四边均为简支边时,有边界条件

$$x = 0, a \text{ 时: } w = 0, M_x = 0, \beta = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0;$$

$$y = 0, b \text{ 时: } w = 0, M_y = 0, \alpha = 0, \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0.$$

2.2 求固有频率

$$\omega_{mn}^2 = \left\{ \frac{G_c \pi^4 B \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (h+t)^2}{2(2D + D_c) \left[\frac{B \pi^2}{2} \left(\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \frac{G_c}{h} \right]} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right\} \frac{2D + D_c}{\bar{m}} \quad (6)$$

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b w_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy}{ab \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left[(2D + D_c) + \frac{B(h+t)^2 G_c}{B h \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + 2G_c} \right]} \quad (7)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\omega_{mn}}.$$

$$\frac{4 \int_0^a \int_0^b v_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy}{ab \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left[(2D + D_c) + \frac{B(h+t)^2 G_c}{B h \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + 2G_c} \right]} \quad (8)$$

将(6),(7),(8)式代入(3)可得到挠度表达式. 层合板的表层为 SMA 板,式中 $B = \frac{Et}{1-\mu^2}$, $D =$

$\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ 均与 SMA 的弹性模量 E 有关. 而 $E(\xi)$

$= \frac{E_A - E_M}{2} (\cos \xi \pi + 1) + E_M$, ξ 为马氏体含量的比例. 故通过改变或控制薄板中的马氏体含量,可以改变结构的固有频率,从而改变结构的挠度.

3 算例

此处,我们设形状记忆合金薄板 $E_M = 24.1 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\mu = 0.33$, $E_c = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\rho = 6450 \text{ kg/m}^3$, 令: $w_0 = 0 \text{ m/s}$, $v_0 = 40 \text{ m/s}$, $t_1 = 1 \text{ s}$, $\mu_c = 0.26$, $b = a$, $B = \frac{Et}{1-\mu^2}$, $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$, $D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\mu_c^2)}$, $G_c = \frac{E_c}{2(1+\mu_c)}$, $E(\xi) = \frac{E_A - E_M}{2} (\cos \xi \pi + 1) + E_M$, $E_A = 75.9 \times 10^9 \text{ Pa}$, w_0, v_0 为初速度.

另设表层薄板的倾角 $\rho = 3^\circ$, $h = 0.416 \text{ m}$, 则可求出该斜面的方程为: $z = -0.052x - 0.203$.

由此,我们可绘制出 $x = \frac{a}{2}$ 时,薄板中面的振动图形,如图 2 所示. 其中横坐标 ξ 为马氏体含量的比例,纵坐标为中面的振幅值,单位为 m. 由图可知,当 ξ 为某些特定值时,振幅为 0. 同理,我们可由此方法

得知薄板的最大振幅发生处. 所以我们可通过激励 SMA 获得所需要的马氏体含量, 使材料的弹性模量发生变化, 从而改变结构的刚度, 而实现对结构的振动进行主动控制.

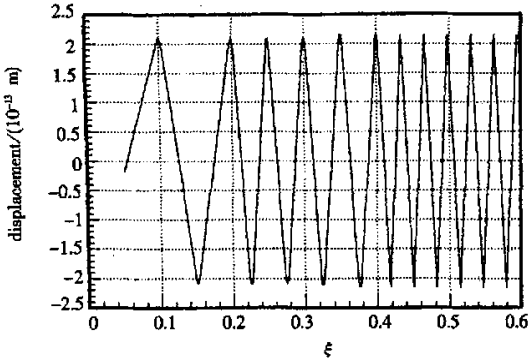


图2 $x=a/2$ 时的 $w-\xi$ 图

Fig. 2 Curves of $w-\xi$ when $x=a/2$

4 结论

本文通过已有的夹层板及硬夹心扁壳理论, 利用广义变分法求出硬夹心夹层板的平衡方程, 并分析了表层不等厚板的振动问题. 考虑到其为形状记忆合金智能夹层板, 马氏体相变发生量直接决定了系统结构参数的改变, 故我们通过对马氏体相变原理的研究, 确定了将形状记忆合金材料引入振动主动控制的可能性. 本文通过计算、分析, 我们得到了较好的结果.

参考文献

- 陶宝棋. 智能材料结构. 北京: 国防工业出版社, 1999, 24 ~ 54 (Tao Baoqi. Smart materials and structures. Beijing: Defence Industrial Press, 1999, 24 ~ 54 (in Chinese))
- 中国科学院北京力学研究所, 固体力学研究室板壳组. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动. 北京: 科学出版社, 1977 (Chinese Academy of Science Beijing Mechanics Research Institute, Plate Group of Solid Mechanics Research Office. The bending, stabilization and vibration of sandwich plate and shell. Beijing: Science Press, 1977 (in Chinese))
- 周际平, 薛大为. 具有不等厚表层的硬夹心双曲夹层扁壳问题. 北京工业学院学报. 1988, 8(4): 31 ~ 45 (Zhou Jiping, Xue Dawei. On the problems of a shallow double curved sandwich shell with hard core and face layers of unequal thicknesses. *J Beijing Inst Technology*, 1988, 8(4): 31 ~ 45 (in Chinese))
- 张双寅, 刘济庆, 于晓霞, 蔡良武. 复合材料结构的力学性能. 北京: 北京理工大学出版社, 1992 (Zhang Shuangyin, Liu Jiqing, Yu Xiaoxia, Cai Liangwu. The mechanics function of composite material structure. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1992 (in Chinese))
- 薛大为. 板壳理论. 北京: 北京工业学院出版社, 1988 (Xue Dawei. The theory of plate and shell. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988 (in Chinese))
- 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981 (Hu Haichang. The variational principle and application of elastic mechanics. Beijing: Science Press, 1981 (in Chinese))
- 徐祖耀. 形状记忆材料. 上海: 上海交通大学出版社, 2002 (Xu Zuyao. Shape memory materials. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2002 (in Chinese))
- 邹静, 钟伟芳, 王兴光. 含形状记忆合金纤维的复合材料层合板的弯曲及自由振动的有限元分析. 固体力学学报, 2000, 21(1): 27 ~ 32 (Zou Jing, Zhong Weifang, Wang Xiangguang. The analysis of deflection and free vibration of laminated composite plates embedded with shape memory alloy fibers by finite element method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2002, 21(1): 27 ~ 32 (in Chinese))

VIBRATION ANALYSIS OF SMART CHANGED HARD-SANDWICH PLATE

Hu Ningning Zhang Yongfa

(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081 China)

Abstract This paper proposed a control method for the vibration of the hard-sandwich plate made of shape memory alloys (SMA) and ordinary steel, obtained an equilibrium equation for the hard-sandwich plate, and analyzed the vibration of the smart changed hard-sandwich plate. An numerical example shows that the method is feasible.

Key words simply-supported, changed thickness, hard-sandwich plate, shape memory alloys