

多体系统多点碰撞接触问题的数值求解方法

刘才山 陈 滨 彭 瀚 乔 勇

(北京大学力学与工程科学系,北京 100871)

摘要 多体系统多点接触碰撞问题可以归结为一个将系统的动力学方程与并协性约束方程相结合的问题. 针对这样一个含并协性条件的混合方程组,建立了基于LCP格式的包含碰撞/接触问题的多刚体系统动力学分析框架,提出了一种基于步长评价准则的变时间步长的数值求解策略,实现了无摩擦情况下多刚体系统多点接触碰撞问题的数值算法. 最后给出了数值算例,验证了算法的有效性.

关键词 多体动力学,接触碰撞,LCP方法

引 言

对含理想约束的多刚体系统来说,可以利用经典刚体动力学理论来描述复杂力学系统的动力学行为,并形成一ODE方程组来进行数值模拟. 然而当系统中含有摩擦、碰撞、接触等具有非光滑性质的刚性约束时,利用经典刚体动力学理论来刻画系统的动力学特性时会遇到一些理论上的困难. 这些困难包括:1)当处理结构中的超静定问题时,刚体动力学不存在唯一解. 2)对含接触、碰撞等单边约束的力学系统,Coulomb干摩擦作用会引起的系统动力学方程出现不协调现象,如著名的Painleve疑难问题^[1]和Kane动力学之迷问题^[2]. 这些问题的出现表明,经典刚体动力学在理论构架存在固有的缺陷. 为了弥补这些缺陷,人们不得不寻求解决这些问题的其它途径.

产生以上问题的根源当然可以归结为刚体动力学的基本假设——刚性假设. 解决以上问题的处理方式之一就是求助于变形体力学,利用变形体的本构关系,得到描述系统变形运动的偏微分方程形式(PDE)的模型刻画,然而由于这种模型高度依赖于系统的几何构形及相关的材料性质,因此利用这种方法处理具有实时快速计算要求的动力系统来说是困难的,如虚拟现实(VR)中的动力学计算,或一些动力系统的控制算法等.

另一种有效的处理以上问题的方法是将刚性假设局部柔性化,利用弹簧阻尼等集中参数模型将动

力系统中的非光滑区域局部连续化,从而得到一个不包含非光滑过程的ODE方程组. 这种方法可以避免刚体动力学处理具有非光滑约束性质的力学系统所带来的困难,然而由于这些ODE方程组中通常包含两个差异较大的时间尺度和几何尺度,如碰撞的作用时间与系统整体运动的时间相比,系统的整体运动学参量与接触变形量相比等,这必然会导致DAE方程在数值积分中的Stiff问题^[3].

如何基于刚体动力学的基本假设,建立能够处理含非光滑约束性质的一类力学问题的理论分析框架及高效的数值算法,一直是人们研究的一个重要内容. 1980年Lotstedt^[4]首次将这类问题归结为一个含并协性条件的数学规划问题来处理,此后,Panagiotopoulos^[5],Baraff^[6],Glocker^[7]等一些应用数学领域的学者对此开展了深入的研究,Pfiffel等人^[8]将这一理论框架应用于多体系统动力学当中. 随着现代应用数学理论,如微分包含、变分不等式、凸规划理论的发展,以及虚拟现实、机器人动力学控制等工业技术的不断进步,对这一问题的研究逐步深入,并且近年来在国际上形成了一个重要的研究方向.

基于并协性条件建立起的描述含非光滑过程的多体系统动力学理论分析框架,实质上就是将刚体动力学的刚性约束利用一个并协性方程来刻画,并将其嵌入到多体动力学的DAE方程当中,从而在系统的非光滑区域形成一个数学规划问题来处理. 因此寻求这类问题有效的数值算法是其中研究的一

2003-09-09 收到第一稿,2003-11-14 收到修改稿.

• 国家自然科学基金资助项目(10272002)和教育部博士点基金资助项目(2002001032).

个重要内容. Stewart 和 Trinkle^[9]针对含摩擦的完全非弹性碰撞问题,提出了一种基于时间步长积分求解线性并协性问题(Linear Complementarity Problem)的数值方法,并基于微分包含测度理论给出了该数值方法的收敛性结果^[1]. Anitescu^[10]将 Stewart 的工作推广到处理非弹性碰撞的一类问题当中. Tzitzouris^[11]在以上工作的基础上,提出了变步长的数值方法并将其应用到非线性并协性问题(Non-Linear Complementarity Problem)当中.

本文在以上工作的基础上,针对不含摩擦作用的多体系统多点接触碰撞问题,基于线性并协性条件建立描述多刚体系统碰撞接触动力学理论分析的一般框架,提出了基于变时间步长方法的数值求解策略,文中最后给出了包含接触和碰撞的数值算例,验证了该方法的有效性.

1 动力学模型

对于含接触、碰撞等单边约束的多体系统,利用经典动力学的方法,可得到系统的动力学方程为

$$M_q(q)\ddot{q} = g(q, \dot{q}, t) + W_n c_n W_t c_t + W_o c_o, \forall t \in [t_0, T] \quad (1)$$

其中 $q \in R^{n_q}$ 为系统的广义坐标, n_q 为系统广义坐标的数目. M_q 是一个 $n_q \times n_q$ 个的正定的质量矩阵, $g(q, v, t)$ 为包含外部作用力和惯性力在内的非接触力列向量. 下标 n, t, o 分别表示接触面的法线和切平面的方向. $c_{n,t,o}$ 为对应方向的接触力, $W_{n,t,o}$ 为对应刚性接触约束的 Jacobian 矩阵.

设系统运动过程中存在 n_c 个可能的接触点对, 定义如下的间隙函数 $\Psi(q)$ 向量

$$\Psi(q) = (\Psi_1^T \Psi_2^T \dots \Psi_{n_c}^T)^T, \in R^{3n_c \times 1} \quad (2)$$

间隙函数向量中的每一个分量对应一个可能接触点的位移矢量.

方程(1)中的 Jacobian 矩阵 $W_{n,t,o}$ 可以表示为如下形式

$$W_{(n,t,o)} = \left(\frac{\partial \Psi_{(n,t,o)}}{\partial q} \right)^T, \in R^{n \times n_q} \quad (3)$$

为了确定包含接触点处速度在内的系统的速度向量 v , 定义如下的与系统的广义速度 \dot{q} 之间的映射函数

$$\dot{q} = G(q)v \quad (4)$$

将式(4)对时间微分, 将其代入系统的动力学方程中, 在不考虑摩擦作用的情况下, 方程(1)有如下的形式

$$M_q(q)G(q)\dot{v} = g(q, \dot{q}, t) - (G(q)v)^T \cdot$$

$$M_q \frac{\partial G(q)}{\partial q} v + W_n c_n, \forall t \in [t_0, T]$$

定义如下的变量

$$M(q) = M_q(q)G(q),$$

$$f(q, v, t) = g(q, \dot{q}, t) - (G(q)v)^T M \frac{\partial G(q)}{\partial q} v$$

则系统的动力学方程可表示为

$$M(q)\dot{v} = f(q, v, t) + W_n c_n, \forall t \in [t_0, T] \quad (5)$$

假定系统中的碰撞或接触总是发生在两个刚体之间, 刚体 A 上的点 i 与刚体 B 上的点 j 在运动中有碰撞, 则点 i 与点 j 之间的距离就是间隙函数 $\Psi_n(q)$ 中的一个分量. 由刚体运动的刚性假设, $\Psi_n(q)$ 的每一分量都为非负值, 并且当某分量为 0 时(接触), 对应点上存在接触力; 当该分量非 0 时(未接触), 对应点上没有接触力.

定义 1 并协性问题

给定一个函数 $F: R^k \rightarrow R^k$, 并协性问题 $CP(F)$ 就是要找到一个 $x \in R^k$ 满足

$$0 \leq F(x) \perp x \geq 0$$

这里, \perp 表示内积为 0. 当函数 F 为非线性, 称此问题为非线性并协性问题——NCP (Nonlinear Complementarity Problem), 当 F 是关于 x 的线性函数时, 则称此问题为线性并协性问题——LCP (Linear Complementarity Problem).

按照以上定义, 间隙函数 $\Psi_n(q)$ 和接触力可以表示为如下的一个并协性条件, 即

$$0 \leq c_n \perp \Psi_n(q) \geq 0 \quad (6)$$

接触点处的法向相对速度 v_n 可表示为

$$v_n(q, v) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(q) = J \Psi_n(q) G(q) v = W_n(q) v \quad (7)$$

式中的每个分量对应一对如前所述点 i, j 之间的相对法向速度, $J \Psi_n(q)$ 为间隙函数对广义坐标 q 的 Jacobian 矩阵.

根据系统的动力学方程(5)和并协性条件(6), 含接触碰撞问题的多体系统的运动方程可描述为一个 ODE-LCP 混合型方程

$$\left. \begin{aligned} M(q)\dot{v} &= f(q, v, t) + W_n(q)^T c_n \\ \dot{q} &= G(q)v \\ 0 &\leq c_n \perp \Psi_n \geq 0 \end{aligned} \right\} \forall t \in T = [t_0, T] \quad (8)$$

本文的目的就是实现并讨论求解这个方程组的数值解的方法. 在式(8)中的并协性条件中, 由于接触力 c_n 与间隙函数 $\Psi_n(q)$ 之间不存在直接的函数关

系,为建立碰撞接触过程中的 LCP 方程,下面我们将针对碰撞和接触两种情况分别进行讨论.

2 碰撞模型

多体系统的碰撞是一个及其复杂的过程,刚体的刚性假设和碰撞接触定律为研究多体系统的碰撞问题提供了一个非常理想化的模型,利用这样一个理想化的模型可以将碰撞过程简化为一个 LCP 问题,并通过一般性的 LCP 求解算法进行数值模拟.假定碰撞发生在 $t^* \in [t_0, T]$ 则有

$$v^{*+} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} v(t^*, \tau), v^{*-} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} v(t^* - \tau),$$

并且 $q^* = q(t^*)$ 上标 * 表示碰撞发生时刻各个变量代表的值,+, - 分别代表碰撞时刻的各个变量值的右极限和左极限. $t^* = t^0$ 时,有 $v^{*+} = v^{0+}$. 在第 i 个接触点与接触面发生碰撞的时刻,必然有 $\Psi_n^* = 0$; 反之亦然. 定义在 t^* 时的碰撞点的集合为 α

$$\alpha = \{i; \Psi_n(q^*) = 0\} \quad (9)$$

碰撞过程中的冲量为 λ_n

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{t^* - \tau}^{t^* + \tau} c_n dt = \lambda_n \in R^n \quad (10)$$

采用 Newton 碰撞定律确定碰撞点处碰撞前后的运动学状态,定义碰撞恢复系数为 $\epsilon_n \in [0, 1]$ 则碰撞时刻运动学方程为

$$v_{nn}^{*+} + \text{diag}(\epsilon_n)v_{nn}^{*-} = 0 \quad (11)$$

对无摩擦的多刚体系统来说,经典刚体碰撞动力学理论显然满足如下基本的物理定律,1)碰撞前后系统的动量是守恒的;2)碰撞后系统的动能不会增加.下面将系统的碰撞过程描述为一个 LCP 方程的形式.

在碰撞接触点集合 α 内显然有 $\lambda_{nn} \geq 0$,在碰撞点集合 α 外,即 α 的补集 $\bar{\alpha}$ 内有 $\lambda_{nn} = 0$,结合碰撞时刻的运动学方程(11),我们有如下的并协性条件

$$0 \leq [v_{nn}^{*+} + \text{diag}(\epsilon_n)v_{nn}^{*-}] \perp \lambda_{nn} \geq 0 \quad (12)$$

根据碰撞过程中动量守恒的性质,我们有

$$v_{nn}^{*+} = v_{nn}^{*-} + W_{nn}(q^*)M^{-1}(q^*)W_{nn}^T(q^*)\lambda_{nn} \quad (13)$$

将(13)式代入式(12),可得到如下的并协性方程

$$0 \leq [(1 + \text{diag}(\epsilon_n))v_{nn}^{*-} + W_{nn}(q^*)M^{-1}(q^*)W_{nn}^T(q^*)\lambda_{nn}] \perp \lambda_{nn} \geq 0 \quad (14)$$

由 λ_{nn} 的系数可以看出,这是一个变量为 λ_{nn} 的 LCP 方程. 综合系统的运动方程(5)和并协性方程

(14),可以得到求解碰撞问题的 ODE-LCP 混合动力学方程组

$$\left. \begin{aligned} M(q^*)v^{*+} &= M(q)v^{*-} + W_n^T(q^*)\lambda_n \\ \dot{q}^{*+} &= G(q^*)v^{*+} \\ 0 &\leq [(I + \text{diag}(\epsilon_n))v_{nn}^{*-} + W_{nn}(q^*)M^{-1}(q^*)W_{nn}^T(q^*)\lambda_{nn}] \perp \lambda_{nn} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3 接触力模型

当多体系统间发生碰撞时,可以利用(15)计算碰撞过程中的冲量以及碰撞后碰撞点处的运动状态,当多体系统间发生连续接触时,必须计算由于接触产生的接触力.由于无论是运动初始,还是在某次碰撞发生以后,都是采用当前的速度、位置条件来求解接触力,因此对初始发生接触和碰撞后发生接触在计算接触力时可以采用同一个过程.这里以初始状态发生接触的情况为例,并以上标 0 表示该量在初始状态的取值.

对发生接触的点必须满足接触间隙函数 $\Psi_n(q)$ 和法向相对速度 v_n 均为零这两个条件,以集合 β 表示这个指标集,则

$$\beta = \{i \in \alpha; v_{nn}^0 = 0\} \in \alpha \quad (16)$$

接触点处的法向加速度 a_n 为

$$a_n = \frac{d^2}{dt^2}\Psi_n = \frac{d}{dt}v_n \quad (17)$$

将间隙函数 Ψ_n 在 q^0 处二阶 Taylor 展开

$$\Psi_n(q(t)) = \Psi_n(q^0) + (t - t_0)v_n^0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 a_n^0 + o((t - t_0)^2) \quad (18)$$

这个 Taylor 展开式在接触点集合 α 中的分量可以写成

$$\Psi_{\alpha}(q(t)) = (t - t_0)v_{\alpha}^0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 a_{\alpha}^0 + o((t - t_0)^2) \quad (19)$$

显然,当 $v_{\alpha}^0 \geq 0$,必存在一个足够小的实数 τ ,使得在 $[t_0, t_0 + \tau]$ 上满足 $v_{\alpha \cap \beta} > 0$,即在集合 α 与集合 β 的补集 $\bar{\beta}$ 内,必有

$$\Psi_{\alpha \cap \bar{\beta}}(q(t)) = \int_0^t v_{\alpha \cap \bar{\beta}} dt > 0 \quad (20)$$

根据并协性条件(6),在集合 $\alpha \cap \bar{\beta}$ 内,法向接触力为零,即

$$c_{\alpha \cap \bar{\beta}} = 0 \quad (21)$$

在集合 β 内, Ψ_{β} 在 q^0 处的二阶 Taylor 展开式(18)可以化简为

$$\Psi_{\beta n}(q(t)) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \alpha_{\beta n}^0 + o((t - t_0)^2) \quad (22)$$

上式可以改写为

$$\frac{2}{(t - t_0)^2} \Psi_{\beta n}(q(t)) = \alpha_{\beta n}^0 + o((t - t_0)^2) \quad (23)$$

取极限 $t \downarrow t_0$, 根据并协性条件(6), 可得到如下求解接触问题的 ODE-LCP 混合动力学方程组

$$\left. \begin{aligned} M(q^0) \dot{v}^0 &= f(q^0, v^0, t_0) + W_{\beta n}^T(q^0) c_{\beta n}^0 \\ c_{\beta n}^0 &= 0 \\ 0 &\leq \alpha_{\beta n}^0 \perp c_{\beta n}^0 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

为将(24)式中的并协性条件表示为关于 $c_{\beta n}^0$ 的 LCP 形式, 由式(7)对时间 t 求导

$$\alpha_{\beta n} = \dot{v}_{\beta n}(q, v) = [G(q^0) v^0 \nabla^2 \Psi_{in}(q^0) \cdot G(q^0) v^0]_{i \in \beta}^T + W_{\beta n}(q^0) \dot{v}^0 \quad (25)$$

式中 $\nabla^2 \Psi_{in}$ 为间隙函数对广义坐标的二阶偏导数. 利用动力学方程(5)和(25), 可得到接触点处的法向加速度 $\alpha_{\beta n}^0$ 与接触力 $c_{\beta n}^0$ 的表达式

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\beta n} &= W_{\beta n}(q^0) M^{-1}(q^0) f(q^0, v^0, t_0) + \\ & [G(q^0) v^0]^T \nabla^2 \Psi_{in}(q^0) G(q^0) v^0]_{i \in \beta} + \\ & W_{\beta n} M^{-1}(q^0) W_{\beta n}^T(q^0) c_{\beta n}^0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

4 基于时间变步长的数值算法

由方程(15)和(25)可以看出, 不管是处理碰撞问题还是处理接触问题, 都是一个包含 LCP 方程和一个 ODE 方程的混合方程组. 为了实现这样一个混合方程组的求解, 我们采用了基于时间步长积分的数值求解算法. 该算法的基本思想是将 LCP 求解器植入 ODE 求解器当中. 外层采用隐式梯形 Euler 方法对 ODE 方程进行求解, 并利用碰撞/接触检测算法判别系统中是否存在碰撞接触的点, 在检测到碰撞/接触后调用 LCP 求解器, 重新初始化接触点处的速度、加速度、接触力, 接着进行 ODE 的求解. 对 LCP 问题的求解, 我们采用了标准的 Lemke 算法, 其基本思想类似于数学规划中的单纯形方法, 利用在构形空间中的转动矢量, 寻求满足并协性条件的正交向量基, 该正交向量基即为并协性方程的解向量. 关于 Lemke 算法的详细描述可参见文献[12].

基于隐式梯形 Euler 方法, 我们可以将系统动力学方程进行离散化

$$\left. \begin{aligned} M(q^{m+1}) \dot{v}^{m+1} &= f(q^{m+1}, v^{m+1}, t_{m+1}) + W_n(q^{m+1}) c_n^{m+1} \\ v^{m+1} &= v^m + \frac{h}{2} (\dot{v}^m + \dot{v}^{m+1}) \\ q^{m+1} &= q^m + \frac{h}{2} (G(q^m) v^m + G(q^{m+1}) v^{m+1}) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

由于式(27)是一个隐式方程组, 为确定下一时刻点的系统的运动状态 q^{m+1} , v^{m+1} 和 \dot{v}^{m+1} , 我们采用如下的变步长数值求解策略.

Step1 首先利用当前时刻的接触力 c_n^m 计算其估计值 $\tilde{q}, \tilde{v}, \tilde{\dot{v}}$

$$\left. \begin{aligned} M(\tilde{q}) \tilde{\dot{v}} &= f(\tilde{q}, \tilde{v}, t_{m+1}) + W_n(\tilde{q}) c_n^m \\ \tilde{v} &= v^m + \frac{h}{2} (\dot{v}^m + \tilde{\dot{v}}) \\ \tilde{q} &= q^m + \frac{h}{2} (G(q^m) v^m + G(\tilde{q}) \tilde{v}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

在可变步长的积分方法中, 式(28)中的 h 也是未知量, 因此方程的数目不够, 为此需要补充间隙函数 Ψ_n 的某些分量为零的条件. 设预测到的穿透发生在点 i_1, i_2, \dots, i_m , 我们从中任取一个点 i_p , 并将 $\Psi_{i_p} = 0$ 的条件加入上述方程组, 这样就可以解出发生碰撞/接触的时间步长 h 和运动状态的估计值.

Step2 根据系统运动状态的近似值 $\tilde{q}, \tilde{v}, \tilde{\dot{v}}$, 利用 Lemke 算法, 求解如下的 LCP 方程确定接触力 c_n^{m+1}

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\beta n}^{m+1} &= W_{\beta n}(\tilde{q}) M^{-1}(\tilde{q}) f(\tilde{q}, \tilde{v}, t_{m+1}) + [(G(\tilde{q}) \tilde{v})^T \cdot \\ & \nabla^2 \Psi_{in}(\tilde{q}) G(\tilde{q}) \tilde{v}]_{i \in \beta} + W_{\beta n} M^{-1}(\tilde{q}) W_{\beta n}^T(\tilde{q}) c_{\beta n}^{m+1} \\ 0 &\leq \alpha_{\beta n}^{m+1} \perp c_{\beta n}^{m+1} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Step3 将接触力 c_n^{m+1} 代入(28)式, 得到第 $m+1$ 步的系统的状态量 q^{m+1} , v^{m+1} 和 \dot{v}^{m+1} .

Step4 上一步所得到的系统的运动状态并不能保证碰撞/接触点处的刚性单边约束的成立, 因此需要重新对碰撞接触点进行检测, 如果间隙函数 $\Psi_{in}(t_{m+1}) < 0$, 表明接触点穿透, 需要将步长减半, 回到 Step 1 重新计算. 如果发生碰撞, 则采用 Lemke 算法对(14)式求解并重新计算新的 v^{m+1} , 如果发生连续接触, 则采用 Lemke 算法结合(24)和(26)式进行计算, 确定新的 \dot{v}^{m+1} 和 c_n^{m+1} . 然后将步长加 1, 计算下一个时刻点.

在以上计算过程中, 步长的选择对正确的确定碰撞/接触发生的时刻和提高数值计算的效率非常重要, 为此, 我们采用了基于如下评价规则的步长选择机制.

用 h -init 表示初始的时间步长, h 表示最后计算采用的步长, 设分值为 s , 当 h 小于 h -init 说明上一步中采用的 h -init 较大, 这时将分值减 1, 如果 h 大于 h -init, 说明上一步中采用的 h -init 较小, 将分值加 1. 通过检查 s 的值, 如果已连续多次的时间步

长小于初始步长,将初始步长减半,如果连续多次没有进行步长折半,说明可以采用较大步长也能计算,将初始步长加倍.

5 数值算例

为了验证本文提出的数值算法的有效性,本文以放置在一光滑水平面上的直杆在重力作用下的运动情况为例,研究含接触/碰撞等非光滑约束的运动情况,系统的初始状态如图 1 所示.

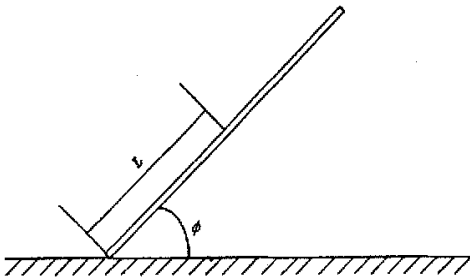


图 1 在光滑水平面上的直杆
Fig.1 A rod in a non-friction plane

系统的结构参数如下,杆件的长度为 $2L=2$ (m),质量 $m=1$ (kg),广义坐标 $q=[x \ y \ \phi]^T$, $q^0=[L/\sqrt{2} \ L/\sqrt{2} \ \pi/4]^T$, $q^0=[0 \ 0 \ 0]^T$,外部力 $f=[0 \ -9.8m \ 0]^T$,杆件的两端为可能潜在的碰撞/接触点,其相应的碰撞恢复系数为 $\epsilon=[0.4 \ 0.4]^T$,两碰撞/接触点处的间隙函数 $\Psi_n(q)=[q_2 - L\sin(q_3) \ q_3 + L\sin(q_3)]^T$.

图 2 和图 3 分别表示在杆两个端点处法向相对速度和接触力. 由图 2 可以看出,杆在下落过程中,右端的接触点与地面经过 5 次碰撞后,静止在地面上,左端点一直与地面保持接触. 由图 3 的接触力曲

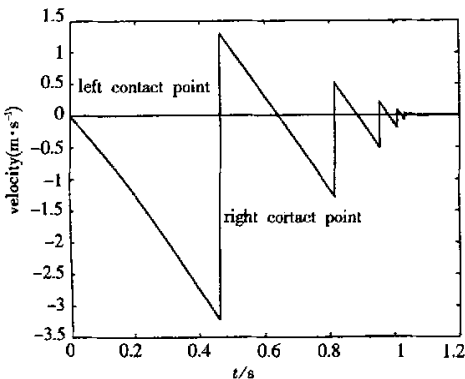


图 2 两个接触点处的法向速度
Fig.2 The normal velocity of the two contact points

线可以看出,随着杆件的下落,左端点处的接触力逐步减小,当杆件与地面的夹角很小时,接触力逐步增大,当静止在地面上时,两端点的接触力相等并分别等于杆件重量的一半. 图 4 给出了杆件下落过程中

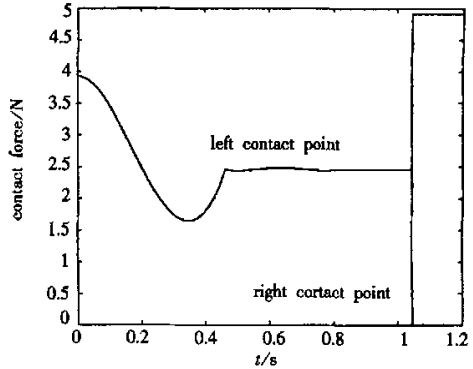


图 3 两个接触点处的接触力
Fig.3 The normal contact force of the two contact points

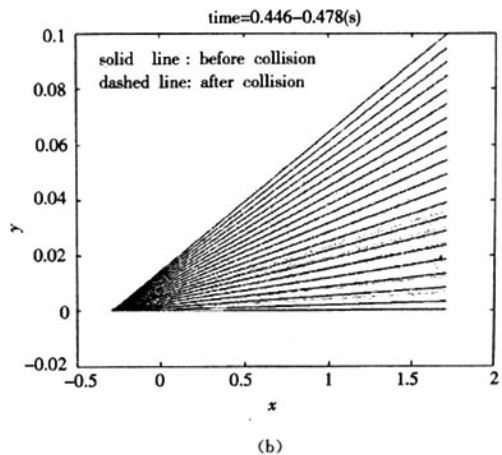
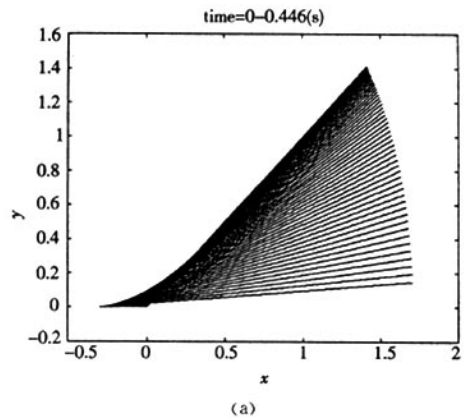


图 4 杆件下落过程中的状态图
Fig.4 The state diagram of the sliding rod

的状态图. 图(a)表示在 $0 \sim 0.446$ s 时间范围内的杆件的运动过程. 图(b)表示在 0.446 s ~ 0.478 s 时间范围内的杆件的运动过程. 由图(b)可以明显的看出杆件的跳起过程.

6 结论

本文针对无摩擦多刚体系统多点碰撞/接触问题, 通过将碰撞/接触点处的刚性非光滑单边约束转化为一个并协性问题来处理, 形成一个系统的动力学方程与并协性方程相结合的混合动力学方程组, 从而建立起描述多体系统多点碰撞接触问题系统的理论分析框架. 基于时间步长积分方法, 采用 Euler 隐式梯形积分公式和变步长积分策略, 并一种基于评价规则的步长选择机制, 建立了不考虑摩擦情况下的多体系统多点碰撞/接触问题的数值算法. 文中最后针对一在光滑水平面上在重力作用下的运动的直杆给出了相关的数值计算结果, 验证了数值方法的有效性.

基于并协性格式处理多体系统多点碰撞接触问题是当前国际上应用数学和力学领域中一个重要的研究方向, 其中许多理论和算法方面的研究还不成熟, 如对含摩擦的空间多体系统的碰撞接触动力学的理论描述和相关 NCP 算法的研究, 对基于并协性格式的碰撞接触区域局部柔性化的研究等.

参考文献

- 1 Stewart D. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM Review*, 2000, 42(1): 3~29
- 2 陈滨. Kane 动力学之谜之模型解. 力学学报, 2002, 34(增刊): 43~46 (Chen Bin. The impact model resolution of kane dynamics puzzle. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34 (supplement): 43~46 (in Chinese))
- 3 刘才山, 陈滨. 做大范围回转运动的柔性梁的斜碰撞动力学研究. 力学学报, 2000, 32(4): 457~465 (Liu Cai-shan, Chen Bin. The oblique impact dynamic study for a flexible beam undergoing large overall motion. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(4): 475~465 (in Chinese))
- 4 Lotstedt P. Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems. *Z Agnew Math U Mech*, 1981, 61: 605~615
- 5 Panagiotopoulos PD. *Hemivariational Inequalities*. New York: Springer-Verlag, 1993
- 6 Baraff D. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. *Computer Graphics (Proc SIGGRAPH)*, 1994, 28: 23~34
- 7 Glocker Ch, Pfeiffer F. An LCP-approach for multibody systems with planar friction, Proc of the CMIS'92 Contact Mechanics Int Symposium. Lausanne, Switzerland, 1992, 13~30
- 8 Pfeiffer F, Glocker Ch. *Multibody dynamics with unilateral contacts*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1996
- 9 Stewart DE, Trinkle JC. An implicit time-stepping scheme for rigid-body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction. *International J Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39: 2673~2691
- 10 Anitescu M, Potra FA. Formulating Dynamic Multi-Rigid-Body Contact Problems with Friction as Solvable Linear Complementarity Problems. *Nonlinear Dynamics*, 1997, 14: 231~247
- 11 Tzitzouris JA. Numerical resolution of frictional multi-rigid-body systems, via fully implicit time-stepping and nonlinear complementarity. [PhD thesis]. Baltimore Maryland: Department of Mathematical Science, The Johns Hopkins University, USA. 2001
- 12 Daphne Koller. efficient computation of equilibria for extensive two-person games. *Games and Economic Behavior*, 1996, 14: 247~259

NUMERICAL RESOLUTION OF MULTI-BODY SYSTEMS WITH MULTIPLE CONTACT/IMPACT POINTS*

Liu Caishan Chen bin Peng Han Qiao Yong

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract The problem for the multi-rigid-body contact/impact system can be generalized, into a mathematical model, which combines an ordinary differential equation in time with an instantaneous complementarity condition. This paper developed a variable implicit time-stepping scheme for the simulation of the multi-rigid-body contact/impact system with frictionless based on the linear complementarity formulations. A numerical example was provided and the effectiveness of the algorithm for the numerical simulation of such problems was demonstrated.

Key words multi-body dynamics, contac/impact, LCP

Received 09 September 2003, revised 14 November 2003.

- * The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10272002) and the project supported by the Doctoral Discipline of the Ministry of Education, China (20020001032).