

# 参数激励系统的主共振分岔控制\*

符文彬 唐驾时

(湖南大学工程力学系,长沙 410082)

**摘要** 设计了非线性参数控制器来改变参数激励系统的稳态响应,消除了系统主共振时的鞍结分岔和减小了系统稳态响应的幅值.从而消除了系统特有的跳跃和滞后现象.首先由多尺度法得到系统的近似频响方程,再由奇异性理论来分析分岔特性,从而实现非线性控制的目标.由数值模拟来确定了非线性参数控制器的有效性和可行性.

**关键词** 参数激励系统,分岔控制,非线性参数前馈控制,鞍结分岔,跨临界分岔

## 引言

当参数激励系统处于主共振,次谐共振或超谐共振状态时,一个小幅度的外部激励都会产生很大的响应<sup>[1]</sup>.而且在亚谐共振和超谐共振时,系统的稳态响应并不会随着时间而衰减,同时系统还会发生鞍结分岔.而鞍结分岔的产生将会导致系统产生跳跃和滞后现象.这些非线性系统的动力学行为在许多工程实际中是有害的,是不希望发生的.对复杂非线性动力系统的动力学行为控制的主要目的就是要避免这些有害的振动,从而产生所希望的动力学行为.而这些正是分岔控制研究的内容.要指出的是对非自治系统的分岔控制研究要比自治系统的研究进展要缓慢.对于非自治系统,它们的动力学行为与平均方程相关,要研究系统的分岔特性,一般都是研究其平均方程.平均方程的解与稳定性与原非自治系统有很大的关联.用多尺度法不仅能计算稳态响应,而且能计算非稳态过程,描绘非自治系统的全局运动性态,成为分岔控制计算的有效工具.

近几年以来,人们对非线性系统分岔控制这一领域产生了浓厚的兴趣.将非线性动力系统的动力学行为调整到所希望的状态有很多不同的前馈分岔控制方法<sup>[2]</sup>.将自治系统和非自治系统的分岔特性通过线性的和非线性的前馈控制器进行控制<sup>[3]</sup>,或非线性控制<sup>[4]</sup>,或时滞前馈控制.同时许多数学和力学工作者对参数激励系统进行了全面的动力学分析. Pei 等用 C-L 方法和 IHB 方法分析了参数激励

系统的拓扑结构,并对两种方法进行了比较<sup>[5]</sup>; Guckenheimer 等则用分岔理论对包含有 van der Pol 和 Duffing 振子的参数激励系统进行了分析<sup>[6]</sup>; Tang 等人则探讨了强非线性参数激励系统在亚谐共振下的分岔特性<sup>[7]</sup>,等等<sup>[8~12]</sup>.然而,他们都没有从分岔控制的角度对参数激励系统进行进一步的分析.

在本文中,设计了非线性参数分岔控制器对弱非线性参数激励系统在主共振时进行分岔控制.消除了系统在稳态解时的鞍结分岔,同时大大降低了系统的振幅.并研究了系统的奇异性,从而确定非线性控制器的增益.

## 1 非线性参数控制器的设计

考虑弱非线性参数激励系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon(\mu - \eta x^2) \dot{x} + \varepsilon \alpha x^3 + \varepsilon \gamma x \cos \Omega t = u(x, \dot{x}, t) \quad (1)$$

其中  $\omega_0$  为线性基频,  $\varepsilon$  为小参数,  $\mu$  为阻尼系数,  $\alpha$  为立方项系数,  $\eta$  和  $\gamma$  是非线性项系数,  $\Omega$  是外激励的频率. 而  $u(x, \dot{x}, t)$  就是要求设计的前馈控制器.

当  $u(x, \dot{x}, t) = 0$  时, 方程(1)将退化为非线性参数激励振动系统, 它的稳态响应会产生鞍结分岔, 导致跳跃和滞后现象的产生, 而这些是不希望发生的. 在这里, 设计一个适当的非线性前馈控制器, 使得系统发生主共振时, 不产生鞍结分岔, 从而消除跳跃和滞后现象. 分岔控制的一个难点就是要求所用的控

2003-08-20 收到第一稿, 2003-10-15 收到修改稿.

\* 湖南省自然科学基金资助项目(00JJY2007).

制器不能改变分岔的存在性,而这一要求通常是通过首先满足不改变不动点的存在性而达到的,很多常规的控制器的都不满足这个要求,因为它们大都按稳定性原则来设计的.同时,对于工程控制系统,控制器的设计不能过于复杂,特别是不能比原系统的复杂,否则将失去实用价值.因此,在这里假设系统的非线性参数控制器为

$$u(x, \dot{x}, t) = 2\epsilon k x^3 \cos \Omega t \quad (2)$$

其中  $k$  为控制参数. 前馈控制器为仅包含有立方项的外部周期激励.

## 2 主共振响应

对于主共振,外激励可以写成  $\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$ .  $\sigma$  为调谐参数,应用多尺度法,方程(1)的近似解可以写成

$$x = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

其中  $T_0 = t, T_1 = \epsilon t$ . 那么外激励可以写成  $f \cos \Omega t = f \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ . 将方程(3)代入方程(1),有

$$\begin{aligned} & [D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + \\ & 2D_0 D_2) + \dots](x_0 + \epsilon x_1 + \dots) - \\ & \epsilon[\mu - \eta(x_0 + \epsilon x_1 + \dots)^2](D_0 + \epsilon D_1 + \dots) \cdot \\ & (x_0 + \epsilon x_1 + \dots) + \epsilon \alpha(x_0 + \epsilon x_1 + \dots)^3 + \\ & \epsilon \gamma(x_0 + \epsilon x_1 + \dots) \cos \Omega T_0 = \\ & 2\epsilon k(x_0 + \epsilon x_1 + \dots)^3 \cos \Omega T_0 \end{aligned} \quad (4)$$

令  $\epsilon$  的同次幂系数相等,有

$$\begin{aligned} D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0 \\ D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 + \\ \mu D_0 x_0 - \eta x_0^2 D_0 x_0 - \alpha x_0^3 + f \cos \Omega T_0 + \\ 2k x_0^3 \cos(\omega T_0 + \sigma T_1) - \gamma x_0 \cos(\omega T_0 + \sigma T_1) \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1$ . 方程(1)的一阶近似解可以写成

$$x_0 = a \cos(\omega_0 T_0 - \theta) + O(\epsilon) \quad (6)$$

其中振幅和相位角由下面的解调方程确定

$$\omega_0 a' = \mu a \omega_0 - \frac{1}{8} \omega_0 \eta a^3 + \frac{1}{4} k a^3 \sin \theta + \frac{\gamma}{4} a \sin \theta \quad (7)$$

$$\omega_0 a \theta' = \omega_0 a \sigma - \frac{3}{8} a a^3 + \frac{3}{4} k a^3 \cos \theta - \frac{\gamma}{4} a \cos \theta$$

其中方程(7)为非线性自治动力系统. 它的不动点就是原系统的不动点. 如果令  $k=0$ , 方程(7)将退化为原系统的解调方程. 显然,非线性前馈控制项的加入改变了系统的动力特性.

令  $a' = 0, \theta' = 0$ . 得到系统的稳态解的频响方程

$$\frac{(\mu \omega_0 a - \frac{1}{8} \omega_0 \eta a^3)^2}{(\frac{1}{4} k a^3 + \frac{\gamma}{4} a)^2} + \frac{(\omega_0 \sigma a - \frac{3}{8} a a^3)^2}{(\frac{3k a^3}{4} - \frac{\gamma}{4} a)^2} = 1 \quad (8)$$

## 3 分岔分析

将方程(8)展开为下列形式

$$(b_1 r^4 + b_2 r^3 + b_3 r^2 + b_4 r + b_5) r^2 = 0 \quad (9)$$

其中  $r = a^2$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{9k^4}{256} + \frac{9k^2 \eta^2 \omega_0^2}{1024} + \frac{9k^2 a^2}{1024}, \\ b_2 &= -\frac{3k^3 \gamma}{64} + \frac{9ka^2 \gamma}{512} - \frac{3k^2 \alpha \sigma \omega_0}{64} - \frac{3k \gamma \eta^2 \omega_0^2}{512} - \frac{9k^2 \mu \eta \omega_0^2}{64}, \\ b_3 &= \frac{k^2 \gamma^2}{128} + \frac{9a^2 \gamma^2}{1024} - \frac{k \alpha \sigma \omega_0}{32} + \frac{\gamma^2 \eta^2 \omega_0^2}{1024} + \\ & \frac{k \gamma \eta \mu \omega_0^2}{32} + \frac{9k^2 \mu^2 \omega_0^2}{16} + \frac{k^2 \sigma^2 \omega_0^2}{16}, \\ b_4 &= \frac{\gamma^3 k}{64} - \frac{3a \gamma^2 \sigma \omega_0}{64} - \frac{\gamma^2 \eta \mu \omega_0^2}{64} - \frac{3k \gamma \mu^2 \omega_0^2}{8} + \frac{k \gamma \sigma^2 \omega_0^2}{8}, \\ b_5 &= \frac{\gamma^4}{256} + \frac{\gamma^2 \mu^2 \omega_0^2}{16} + \frac{\gamma^2 \sigma^2 \omega_0^2}{16} \end{aligned}$$

很明显方程(9)有解  $r=0$  或  $G(r) = b_1 r^4 + b_2 r^3 + b_3 r^2 + b_4 r + b_5 = 0$ . 现在对  $G(r)$  进行线性变换  $r = y - \frac{b_2}{4b_1}$ , 且令  $h_i = \frac{b_i}{b_1}$ , ( $i=2, 3, \dots, 5$ ), 可以转换为余维三分岔方程

$$y^4 + \lambda y + a_1 + a_2 \lambda + a_3 y^2 = 0 \quad (10)$$

其中  $\lambda = \frac{h_2^3}{8} - \frac{h_2 h_3}{2} + h_4, a_1 = -\frac{5h_2 h_4}{32} + \frac{h_2^2 h_3}{64} + h_5, a_2 = -\frac{3h_2}{32}, a_3 = -\frac{3h_2^2}{8} + h_3$ . 式(10)可视为芽  $g = y^4 + \lambda y$  的一个3-参数普适开折  $G = y^4 + \lambda y + a_1 + a_2 \lambda + a_3 y^2$ . 奇异点是余维数为三的四次跨临界点, 其中  $a_1, a_2$  和  $a_3$  是开折参数. 现在分三种情况分析它的平面分岔拓扑结构.

1)  $a_3 = 0$  时

a) 分岔点集  $B = \{(a_1, a_2, 0) | G = G_y = G_\lambda = 0\} = \{(a_1, a_2, 0) | a_1 + a_2^4 = 0\}$

b) 滞后点集  $H = \{(a_1, a_2, 0) | G = G_y = G_{yy} = 0\} = \{(a_1, a_2, 0) | a_1 = 0\}$

c) 双极限点  $D = \emptyset$

2)  $a_2 = 0$  时

a) 分岔点集  $B = \{(a_1, 0, a_3) | G = G_y = G_\lambda = 0\} = \{(a_1, 0, a_3) | a_1 = 0\}$

b) 滞后点集  $H = \{(a_1, 0, a_3) | G = G_y = G_{yy} = 0\} = \{(a_1, 0, a_3) | a_1 + \frac{1}{12} a_3^2 = 0\}$

c) 双极限点  $D = \emptyset$  3)  $a_1 = 0$  时

3)  $\alpha_1 = 0$  时

a) 分岔点集  $B = \{(0, \alpha_2, \alpha_3) | G = G_y = G_x = 0\}$

$0) = \{(0, \alpha_2, \alpha_3) | 64\alpha_2^2 + \frac{3}{2}\alpha_3 = 0\}$

c) 双极限点  $D = \emptyset$

$= \alpha_3 + \alpha_2^2 = 0$

b) 滞后点集  $H = \{(0, \alpha_2, \alpha_3) | G = G_y = G_{yy} =$

在上述三种情况下, 它们的转迁集和分岔图见图 1.

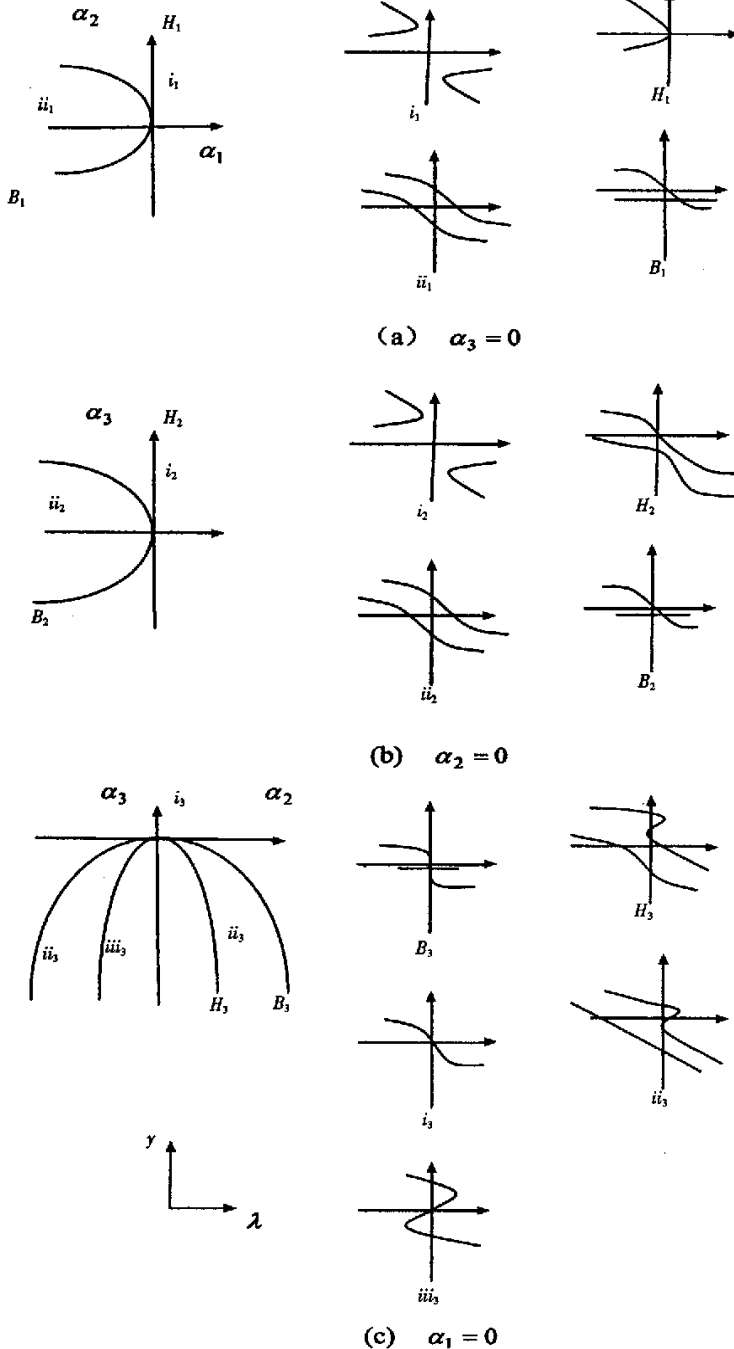


图 1 控制系统的转迁集和分岔图

Fig. 1 The transition set and bifurcation diagrams of the controlled equation

$y$  对应于控制系统主共振时的响应的平方. 分岔图在  $H_1$  区没有极限点和鞍结分岔. 即频响曲线不会发生跳跃和滞后现象. 从分岔控制的目的出发, 只要将系统的参数选择在  $H_1$  区, 便不会发生鞍结分岔.

#### 4 数值模拟

图 2 为参数激励系统在不同控制参数下的频响曲线. 其中参数  $\mu_1=0.1, \alpha=0.2, \eta=0.1, \gamma=8, \omega_0=2$ . 对于非控制开环系统 ( $k=0$ ), 当  $\sigma < \sigma_A$ , 参数激励系统只存在平凡解, 并且是稳定的. 随着  $\sigma$  的增加, 系统的平凡解在通过跨临界分岔点  $A$  时丧失稳

定性, 同时出现非平凡解. 并且随着  $\sigma$  的增加, 系统非平凡解的振幅随着增加. 当曲线经过鞍结分岔  $C$  时, 振幅跳跃到  $F$  点, 并且丧失了稳定性, 只剩下平凡解. 当  $\sigma$  由大变小时, 分两种情况进行分析. 第一种情况: 初始激励很小时, 响应曲线为  $DE$ , 然后通过跨临界分岔点  $E$ . 随着  $\sigma$  减小, 振幅变大, 见图 2. 当曲线经过鞍结分岔点  $M$  时 (见图 3), 振幅由  $M$  点, 跳跃进入  $B$  点. 随着  $\sigma$  的进一步减小, 振幅沿着曲线  $BA$  减小, 达到跨临界分岔点  $A$ , 然后进入直线  $AO$ . 第二种情况: 当初始激励很大时, 系统将不会发生跳跃行为, 响应曲线为  $CBAO$ . 要指出的是突出部分  $CB$  段为高幅振动. 接着讨论控制闭环系统, 即  $k$

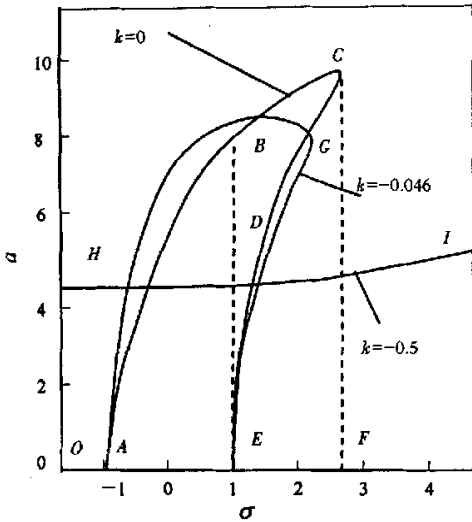


图 2 参数激励控制系统的频响曲线

Fig. 2 The frequency-response curves of the controlled parametrically-excited system

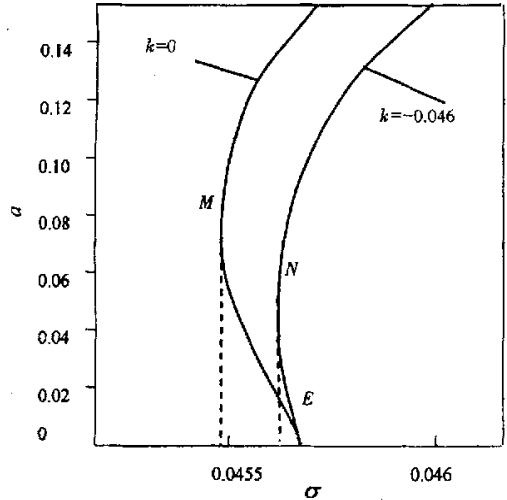


图 3 频响曲线跨临界分岔点 E 区域示意图

Fig. 3 An enlargement of the frequency-response diagram near the transcritical bifurcation point E

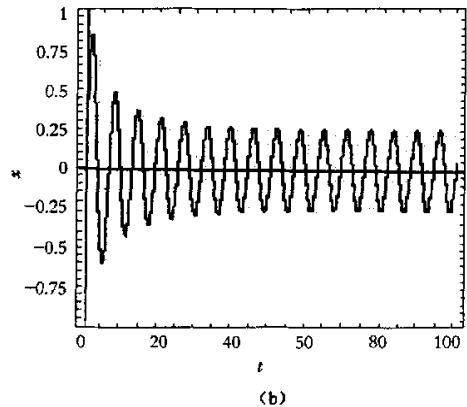
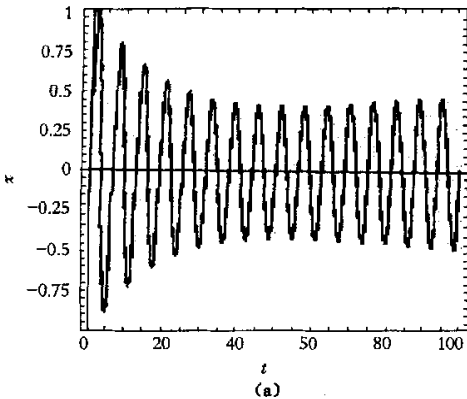


图 4 参数激励系统在不同控制参数下的数值模拟时间历程图

Fig. 4 Numerical simulations of the time response curves for the controlled parametrically-excited systems

$\neq 0$ . 考虑两种情况  $k = -0.046$  和  $k = -0.5$ . 对于第一种情况,很明显,它的频响曲线类似于非控制系统. 然而,系统的振幅大大减小了,鞍结分岔点由  $C$  点漂移到了  $G$  点(见图 2),由  $M$  点漂移到了  $N$  点(见图 3). 对于第二种情况,频响曲线的性质发生了完全的改变. 鞍结分岔和跨临界分岔完全消失了. 同时突出部分和跳跃现象也完全消失,系统的振幅被大大的抑制,振动曲线为  $HI$ .

为了验证摄动理论得到的结果,对参数激励系统进行了数值模拟计算,见图 4. 其中参数  $\mu = 0.1, \alpha = 0.2, \eta = 0.1, \gamma = 8, \omega_0 = 2, \varepsilon = 0.1, \Omega = 2.01$ . 控制参数分别为  $k = -0.046$ (见图 4(a)),  $k = -0.5$ (见图 4(b)). 由图 4 可以明显看出系统  $k = -0.5$  时的稳态响应要比  $k = -0.046$  时小得多,系统的稳态响应得到了有效抑制.

比较图 1 至图 4,数值模拟结果与摄动理论得到的结果是一致的. 因此说明非线性控制器的设计是成功的,有效的.

## 5 结论

分岔控制理论现在正蓬勃发展,方兴未艾. 可以预言,分岔控制的理论和实践在今后相当长的时间内将会有重大的飞跃和突破,成为非线性控制理论的一个富有特色的重要分支. 就目前而言,分岔控制的研究已在化学工程,航天航空工程,生物医学,物理和化学等方面找到应用,显示出其可观的前景和巨大的潜力. 就分岔控制本身而言,人体心脏脉搏以及两心室交替跳动的控制提供了一个很好的例子. 心脏非正常脉搏跳动呈现复杂的分岔和混沌动力特性,分岔控制已成为新的有效调整手段. 在许多工程实际中,参数激励系统中产生的鞍结分岔、跳跃和滞后现象是有害的,是人们不希望发生的. 在本文中,设计了合适的非线性参数控制器来消除系统在共振时的鞍结分岔. 通过分析,非线性控制器可以消除系统在主共振时的鞍结分岔. 而且可以大大减小系统主共振时的响应幅值. 总之,非线性参数控制器对于参数激励系统的分岔控制是有效的.

## 参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Dynamics*. New York: Wiley Press, 1979
- 2 Chen G, Moiola JL, Wang HO. Bifurcation control: Theories, methods, and applications. *Int J of Bifur And Chaos*, 2000, 10: 511~548
- 3 Ji JC. Local bifurcation control of a forced single degree of freedom nonlinear system; saddle-node bifurcation. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 25: 369~382
- 4 Berns DW, Moiola JL, Chen G. Controlling oscillation amplitudes via feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 2815~2822
- 5 Pei Y, Koncay H. Parametrically excited nonlinear systems: a comparison of certain methods. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1998, 33: 967~978
- 6 Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. *Applied Mathematical Sciences*, 1993, 42: 17~36
- 7 Tang JS, Fu WB, Li KA. Bifurcations of a parametrically excited oscillator with strong nonlinearity. *Chinese Physics*, 2002, 11: 1004~1007
- 8 Kang W. Bifurcation and normal form of nonlinear control systems. Parts I and II. *SIAM J Contr Optim*, 1998, 36: 193~232
- 9 Calandrini G, Paolini E, Moiola JL, Chen G. Controlling Limit Cycles and Bifurcation, in *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering System*. Boca Raton: CRC Press, 1999, 200~227
- 10 Adomatis RA, Abed EH. Bifurcation analysis of nonuniform flow patterns in axial-flow gas compressor. *Proc 1992 World Cong Nonlinear Analysts*. FL: Tampa, 1992
- 11 Ajarapu V, Lee B. Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system. *IEEE Trans on Power System*, 1992, 7: 424~431
- 12 Chang HC, Chen LH. Bifurcation characteristics of nonlinear system under conventional PID control. *Chemical Engineering Science*, 1984, 39: 1127~1142

## PRIMARY RESONANCE BIFURCATION CONTROL OF A PARAMETRICALLY EXCITED SYSTEM\*

Fu Wenbin Tang Jiashi

(*Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China*)

**Abstract** In order to modify the steady-state resonance responses, a nonlinear parametric feedback control was proposed to reduce the amplitude of the response and to eliminate the saddle-node bifurcations that take place in the resonance responses. From the singularity theory approach, the nonlinear gain of the feedback control was determined by analyzing the bifurcation diagrams associated with the corresponding frequency-response equation. The illustrative examples show that the proposed nonlinear feedback is effective for controlling the primary resonance response.

**Key words** parametrically excited system, bifurcation control, nonlinear parametric feedback, saddle-node bifurcation, transcritical bifurcation