

一类双自由度碰撞系统的亚谐周期运动存在性

张彦梅 陆启韶 李群宏

(北京航空航天大学理学院, 北京 100083)

摘要 基于 Poincaré 映射方法对一类两自由度碰撞系统进行研究, 经过详细的理论演算得到单碰周期 $1/n$ 的亚谐周期运动的存在性判据, 并能精确地找到亚谐周期运动的初始位置. 表明碰撞系统的周期运动研究可以通过解析与数值方法的结合去实现. 数值模拟表明了亚谐周期运动的存在性判据的正确性, 并通过计算 Jacobi 矩阵的特征值可判断周期运动的稳定性及分岔.

关键词 碰撞系统, 亚谐运动, Poincaré 映射, 稳定性

0 引言

运动部件间存在间隙的振动系统在机械振动问题中经常遇到, 例如: 机器人操作器与环境接触和脱离过程中的碰撞会影响其正常工作; 机械传动因碰撞会产生高频振动和噪音; 航天器伸展和对接系统由于关节间隙导致传动误差并诱发内碰撞; 在汽轮发电机组及其它的高速旋转机械中, 随着高转速高效率的需求, 转子与定子的间隙越来越小, 这导致了转子与定子的碰撞故障不断发生. 间隙是机械结构设计不可避免的现象, 它对系统的动力学行为有很大的影响, 因间隙而引起的碰撞振动呈现复杂的周期运动或混沌运动, 使得这类系统的动态响应变得十分复杂.

许多研究^[1~10]只考虑了单自由度碰撞系统模型, 对多自由度碰撞系统的研究就少得多, 一般要用数值方法处理. Aidanpaa 和 Gupta^[10]用解析方法求出了一类二自由度碰撞振动系统的周期运动, 但其表达式十分繁杂, 无法用来进行动力学分析. 胡海岩在分段线性系统动力学的非光滑分析方面做了不少的工作^[11,12]. 谢建华^[13]对一类碰撞振动系统研究了余维二分岔和 Hopf 分岔. 在转子碰摩问题中, 张思进、陆启韶等^[14~17]应用定性理论和数值方法研究了转子碰摩中出现的擦边分岔行为、周期碰撞运动、混沌运动和延迟反馈混沌控制, 以及非稳态油膜模型下转子的碰摩分岔. 李群宏、陆启韶^[18~20]还对双自由度的碰撞系统和碰摩转子系统分别进行研究, 得

到单碰周期运动的存在性和共存性判据的解析结果, 并讨论了周期解的稳定性问题. 总的来说, 由于动力学复杂性, 以往对多自由度碰撞系统的研究主要在定性或数值方面, 极难获得定量的解析结果.

本文在文^[18]的基础上, 进一步对该双自由度碰撞系统讨论了单碰 $1/n$ 的亚谐周期运动的存在性判据的解析结果, 也讨论了该周期解的稳定性问题, 并通过数值模拟说明了分析结果的正确性.

1 碰撞亚谐周期运动的存在性分析

质量为 m_1, m_2 的两自由度碰撞振动系统(如图 1 所示), 记时间为 \bar{t} , 线性弹簧刚度为 k_i , 线性粘性阻尼系数为 c_i , 在两质量块上分别作用简谐激励力 $f_i(\bar{t}) = \bar{f}_i \cos(\bar{\omega} \bar{t} + \varphi)$, ($i=1, 2$). 设质量块 m_1, m_2 的平衡位置相距 Δ . 分别取它们为原点建立 y_1 和 y_2 坐标. 当时刻 \bar{t} 时, m_1 和 m_2 的位置分别为 $y_1(\bar{t})$ 和 $y_2(\bar{t})$. 显然有 $y_1(\bar{t}) - y_2(\bar{t}) \leq \Delta$, 且当等号成立时碰撞发生. 引进无量纲量: $x_i = \frac{k_i y_i}{\bar{f}_i}, \lambda_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}}$ ($i=1,$

$$2), m = \frac{m_1}{m_2}, \omega_2 = \bar{\omega}_2 \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}, \delta = \frac{k_1 \Delta}{\bar{f}_1}, t = \bar{t} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, f =$$

$$\frac{m \bar{f}_2}{\bar{f}_1}, \omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}. \text{无碰撞时该系统的无量纲运动方程}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\lambda_1 \dot{x}_1 + x_1 = \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x} + 2\lambda_2 \omega_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = f \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

若两部分在 t_0 时刻发生碰撞, 且相邻两次碰撞

2003-08-31 收到第一稿, 2003-10-17 收到修改稿.

• 国家自然科学基金重大资助项目(19990510 和 10172011).

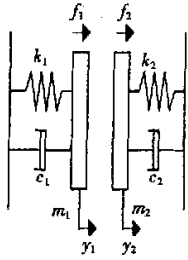


图1 碰撞振动系统
Fig.1 Vibro-impact system

间经历了 $1/n$ 个激励周期, 即间隔时间为 $2\pi/n\omega$ (下面称为单碰周期 $1/n$ 运动, n 为给定的正整数), 又设碰撞恢复系数为 r ($0 < r \leq 1$), 则对应的碰撞条件为

$$x_1(t_0) - x_2(t_0) = \delta \quad (2)$$

$$\dot{x}_2(t_{0+}) - \dot{x}_1(t_{0+}) = r[\dot{x}_1(t_{0-}) - \dot{x}_2(t_{0-})] \quad (3)$$

$$m\dot{x}_1(t_{0+}) + \dot{x}_2(t_{0+}) = m\dot{x}_1(t_{0-}) + \dot{x}_2(t_{0-}) \quad (4)$$

周期性条件为

$$x_i(t_0) = x_i(t_0 + 2\pi/n\omega) \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

$$\dot{x}_i(t_{0-}) = \dot{x}_i(t_{0-} + 2\pi/n\omega) \quad (i = 1, 2)$$

碰撞前后的速度关系可由方程(3)和(4)得出

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t_{0+}) = a\dot{x}_1(t_{0-}) + b\dot{x}_2(t_{0-}) \\ \dot{x}_2(t_{0+}) = c\dot{x}_1(t_{0-}) + d\dot{x}_2(t_{0-}) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $a = \frac{m-r}{m+1}, b = \frac{1+r}{m+1}, c = \frac{m(1+r)}{m+1}, d = \frac{1-mr}{m+1}$.

为了使所得结果比较简单, 本文用解析方法讨论下列无阻尼碰撞系统 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \varphi = 0$)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = f \cos(\omega t) \end{cases} \quad (7)$$

存在单碰周期 $1/n$ 运动的条件, 即考虑周期为 T/n 的单碰亚谐周期解的存在性问题, 这里 $T = 2\pi/\omega, n \in \mathbb{Z}^+$. 当 $\varphi \neq 0, \lambda_i \neq 0 (i = 1, 2)$ 时, 有阻尼碰撞系统(1)~(4)可同样讨论, 但是公式会更加复杂. 实际上, 从我们下面的推导可以看出, 即使这样比较简单的系统(7), 其亚谐运动的表达式也是十分复杂的, 因此给理论分析带来很大的困难.

碰撞系统(7)的相空间为 $R^4 \times R^+$. 记 $V_1 = \dot{x}_1, V_2 = \dot{x}_2$, 并定义

$$\Sigma = \{(x_1, V_1, x_2, V_2, t) \in R^4 \times S \mid x_1 - x_2 = \delta\} \quad (8)$$

式中 $S = \{t \pmod{2n\pi} \mid t \in R^+\}$. 取 Σ 为 Poincaré 截面, 建立 Poincaré 映射 $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 则单碰周期 $1/n$

运动转化为该 Poincaré 映射的不动点去研究.

构造 Poincaré 映射 P 的过程分为两个阶段. 首先, 考虑发生碰撞的阶段. 由 Σ 的定义知, 其上的点满足 $x_1 - x_2 = \delta$, 故可由坐标 x_1, V_1, V_2, t 来刻画. 设系统在 t_0 时刻发生瞬时碰撞, 碰撞前后的点分别用 $(x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-})$ 和 $(x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$ 表示, 这一过程可用映射 P_I 来定义

$$P_I: (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) \mapsto (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+}) \quad (9)$$

因为是瞬时碰撞故有 $t_{0+} = t_{0-} = t_0, x_{10+} = x_{10-} = x_{10}$.

然后, 考虑相邻两次碰撞之间的阶段. 设点 $(x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$ 经过 $1/n$ 个激励周期后在 t_1 时刻又回到碰撞面 Σ , 这一过程可以用另一个映射来表示

$$P_{II}: (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+}) \mapsto (x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-}) \in \Sigma \quad (10)$$

其中点 $(x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-})$ 由系统(7)的流 F_{t_1} 所决定的. 系统(7)的流 F_t 是由其解

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(t - t_0) + B_1 \cos(t - t_0) + \gamma_1 \cos(\omega t), \\ x_2 &= A_2 \sin \omega_2(t - t_0) + B_2 \cos \omega_2(t - t_0) + f \gamma_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (11)$$

确定的, 其中 A_1, B_1, A_2, B_2 是由出发点 $(x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$ 决定的积分常数, $\gamma_1 = (1 - \omega^2)^{-1}, \gamma_2 = (\omega_2^2 - \omega^2)^{-1}$.

于是, 从碰撞面 Σ 出发, 经过一次碰撞再回到碰撞面 Σ 的 Poincaré 映射可写成

$$P = P_{II} \circ P_I: \Sigma \rightarrow \Sigma, (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) \mapsto (x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-}) \quad (12)$$

故只要当 $t_1 - t_0 = 0 \pmod{2\pi/n\omega}$ 时, 有 $(x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}) = (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-})$ 成立, 就有单碰周期 $1/n$ 运动存在. 下面我们具体来找这个单碰周期 $1/n$ 运动存在的条件.

由碰撞条件得出 $x_1(t_{0+}) = x_{10}, \dot{x}_1(t_{0+}) = aV_1 + bV_2$, 其中 V_1, V_2 分别表示两部件在碰撞前的速度, 即记 $V_1 = \dot{x}_1(t_{0-}), V_2 = \dot{x}_2(t_{0-})$. 从而求得积分常数

$$\begin{aligned} A_1 &= aV_1 + bV_2 + \gamma_1 \omega \sin(\omega t_0) \\ B_1 &= x_{10} - \gamma_1 \cos(\omega t_0) \end{aligned} \quad (13)$$

另由周期性条件(5), 当 $t_1 = t_0 + 2\pi/n\omega$ 时, $x_1(t_{1-}) = x_{10}, \dot{x}_1(t_{1-}) = V_1$, 可得

$$\begin{cases} x_{10} = (aV_1 + bV_2 + \gamma_1 \omega S_0)S_n + (x_{10} - \gamma_1 C_0)C_n + \gamma_1 (C_p C_0 - S_p S_0) \\ V_1 = (aV_1 + bV_2 + \gamma_1 \omega S_0)C_n - (x_{10} - \gamma_1 C_0)S_n - \gamma_1 \omega (C_p S_0 + C_0 S_p) \end{cases} \quad (14)$$

式中 $S_0 = \sin(\omega t_0)$, $C_0 = \cos(\omega t_0)$, $S_n = \sin(2\pi/n\omega)$, $C_n = \cos(2\pi/n\omega)$, $C_p = \cos(2\pi/n)$, $S_p = \sin(2\pi/n)$, $n = 1, 2, \dots$. 同理, 由 $x_2(t_{0+}) = x_{20}$, $\dot{x}_2(t_{0+}) = cV_1 + dV_2$, 可得到积分常数

$$\begin{aligned} A_2 &= [cV_1 + dV_2 + f\gamma_2 \omega \sin(\omega t_0)]/\omega_2 \\ B_2 &= x_{20} - f\gamma_2 \cos(\omega t_0) \end{aligned} \quad (15)$$

另由 $t_1 = t_0 + 2\pi/n\omega$ 时, $x_2(t_{1-}) = x_{20}$, $\dot{x}_2(t_{1-}) = V_2$, 可得

$$\begin{cases} x_{20} = (cV_1 + dV_2 + f\gamma_2 \omega S_0)S_{2n}/\omega_2 + \\ \quad (x_{20} - f\gamma_2 C_0)C_{2n} + f\gamma_2 (C_p C_0 - S_p S_0) \\ V_2 = (cV_1 + dV_2 + f\gamma_2 \omega S_0)C_{2n} - \omega_2 (x_{20} - \\ \quad f\gamma_2 C_0)S_{2n} - f\gamma_2 \omega (C_p S_0 + C_0 S_p) \end{cases} \quad (16)$$

式中 $S_{2n} = \sin(2\pi\omega_2/n\omega)$, $C_{2n} = \cos(2\pi\omega_2/n\omega)$, 而 S_0 , C_0 如式(14)所定义.

考虑到 $x_{20} = x_{10} - \delta$, 式(14)和(16)是关于 V_1 , V_2 , x_{10} , t_0 的方程组, 我们可由此得出关于 x_{10} 的一个关系式. 先把式(14)和(16)的第一个方程联立解得

$$\begin{aligned} V_1 &= \{S_{2n}[d(-1+C_n)x_{10} + d(C_0(-C_n+C_p) + \\ & \quad S_0(\omega S_n - S_p)\gamma_1 - bfwS_0S_n\gamma_2) + bS_n((-1 + \\ & \quad C_{2n})(\delta - x_{10}) + f(C_0(C_{2n}-C_p) + \\ & \quad S_0S_p)\gamma_2)\omega_2\} / [(bc-ad)S_nS_{2n}] \\ V_2 &= \{S_{2n}[c(1-C_n)x_{10} + c(C_0(C_{2n}-C_p) + S_0 \cdot \\ & \quad (-\omega S_n + S_p)\gamma_1 + afwS_0S_n\gamma_2) - aS_n((-1 + \\ & \quad C_{2n})(\delta - x_{10}) + f(C_0(C_{2n}-C_p) + \\ & \quad S_0S_p)\gamma_2)\omega_2\} / [(bc-ad)S_nS_{2n}] \end{aligned} \quad (17)$$

利用式(6)给出的 a, b, c, d , 容易得知 $bc - ad = r \neq 0$. 若满足条件

$$S_n \neq 0, S_{2n} \neq 0 \quad (18)$$

再将式(17)分别代入式(14)、(16)的第二个方程, 得到

$$\begin{aligned} S_{2n}(r-d)(C_n-1)x_{10} + C_0((d+rC_n)(C_{2n}-C_p) + \\ rS_n(S_n - \omega S_p)\gamma_1 + S_0((d+rC_n)S_0\gamma_1 + \\ \omega S_n(bf\gamma_2 - (d+rC_p)\gamma_1)) + bS_n((C_{2n}-1) \cdot \\ (\delta - x_{10}) + f(C_0(C_{2n}-C_p) + S_0S_p)\gamma_2)\omega_2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

和

$$\begin{aligned} S_{2n}(c(C_n-1)x_{10} + c(C_0(C_p-C_n) + \\ S_0(\omega S_n - S_p)\gamma_1 - f\omega S_n((a+rC_p)S_0 + \\ rC_0S_p)\gamma_2) + S_n((a-r)(C_{2n}-1)(\delta - \\ x_{10}) - f(C_0(aC_p-r+C_{2n}(rC_p-a)) - \\ (a+rC_{2n})S_0S_p)\gamma_2) + S_n((a-r)(C_{2n}- \end{aligned}$$

$$1)(\delta - x_{10}) - f(C_0(aC_p-r+C_{2n}(-a+rC_p)) - (a+rC_{2n})S_0S_p)\gamma_2)\omega_2 = 0 \quad (20)$$

式(19)和(20)是关于 S_0 和 C_0 的方程, 联立解此方程组, 可得

$$C_0 = \frac{n_t x_{10} + n_u}{n_d}, S_0 = \frac{n_t x_{10} + n_t}{n_d} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} n_d &= (f\gamma_2((a-d+(1+r)C_{2n}-C_n(1+r+(a-d)C_{2n}))S_p\gamma_1 + \omega S_n((d-a+(1+r)C_p - C_{2n}(1+r+(d-a)C_p))\gamma_1 + \\ & \quad 2bf(C_{2n}C_p-1)\gamma_2))\omega_2 + S_{2n}(-c(2\omega C_n C_p - \\ & \quad 2\omega + (1+\omega^2)S_n S_p)\gamma_1^2 + f\omega((-1-r)C_p + \\ & \quad C_n(1+r+(a-d)C_p) + (a-d)(\omega S_n S_p - \\ & \quad 1))\gamma_1\gamma_2 + bf^2 S_n S_p \gamma_2^2 (\omega^2 + \omega_2^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_t &= (\omega(C_n-1)S_{2n}S_p(c\gamma_1 + f(d-r)\gamma_2) - \\ & \quad ((C_{2n}-1)(r-a-(1+d)C_p + C_n(1+d+(a-r)C_p))\gamma_1 + f(C_n-1)(d-r+(1+a)C_p - C_{2n}(1+a+(d-r)C_p))\gamma_2)\omega_2 + \\ & \quad S_n(-\omega(C_{2n}-1)S_p((a-r)r_1 + bf\gamma_2)\omega_2 + \\ & \quad (C_p-1)S_{2n}(bf\gamma_2\omega_2^2 - c\gamma_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_t &= \delta\omega_2((C_{2n}-1)(C_n(1+d+(a-r)C_p) - \\ & \quad (1+d)C_p + (a-r)(\omega S_n S_p - 1))\gamma_1 + \\ & \quad bfS_n\gamma_2(\omega(C_{2n}-1)S_p - (C_p-1)S_{2n}\omega_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_c &= S_p((1+d+(r-a)C_n)(C_{2n}-1)\gamma_1 - \\ & \quad f(C_n-1)(1+a+(r-d)C_{2n})\gamma_2 + \\ & \quad \omega(C_{2n}-1)S_n(bf(1+C_p)\gamma_2 - (1+d+(r-a)C_p)r_1))\omega_2 + S_{2n}(-c(\omega(C_n-1) \cdot \\ & \quad (1+C_p) + S_n S_p)\gamma_1 + f\gamma_2(\omega(C_n-1)(1+a+(r-d)C_p) + bS_n S_p \omega_2^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_u &= \delta\omega_2((C_{2n}-1)(-(1+d+(r-a)C_n)S_p\gamma_1 + \\ & \quad \omega S_n((1+d+(r-a)C_p)\gamma_1 - bf(1+C_p)\gamma_2)) - bfS_n S_{2n} S_p \gamma_2 \omega_2) \end{aligned}$$

如果

$$n_d \neq 0 \quad (22)$$

又注意到 $C_0^2 + S_0^2 = 1$, 就可得到一个关于 x_{10} 的二次方程

$$\begin{aligned} (n_t^2 + n_t^2)x_{10}^2 + 2(n_t n_t + n_t n_u)x_{10} - \\ n_d^2 + n_t^2 + n_t^2 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

将式(13)、(14)代入式(11), 有单碰周期 $1/n$ 运动

$$\begin{aligned} x_1(t, t_0, x_{10}, V_1, V_2) &= (aV_1 + bV_2 + \gamma_1 \omega S_0) \sin[t - t_0] + (x_{10} - \gamma_1 C_0) \cos[t - t_0] + \gamma_1 \cos[\omega t] \\ x_2(t, t_0, x_{10}, V_1, V_2) &= (cV_1 + dV_2 + f\gamma_2 \omega S_0) \sin[t - t_0] / \omega_2 + (x_{20} - f\gamma_2 C_0) \cos[t - t_0] + f\gamma_2 \cos \end{aligned}$$

[ωt]

从上述分析可得出以下结论:

定理 1 若碰撞系统(2)~(4),(7)的参数满足以下条件:

1) $S_n \neq 0, S_{2n} \neq 0, 2) n_d \neq 0, 3)$ 二次方程(23)有实数解(即该方程的判别式非负), 4) $x_2(t, t_0, x_{10}, V_1, V_2) - x_1(t, t_0, x_{10}, V_1, V_2) > \delta, \forall t \in (t_0, t_0 + 2\pi/n\omega)$, 则该碰撞系统存在单碰周期 $1/n$ 运动.

定理 2 若碰撞系统的(2)~(4),(7)的参数满足条件: $S_n = 0, S_{2n} = 0$, 则该碰撞系统不存在单碰周期 $1/n$ 运动.

前面我们讨论了系统(7)的单碰周期解的存在性. 通过 Poincaré 映射, 于是系统(7)的周期解稳定性转化为 Poincaré 映射(12)的不动点稳定性问题. 设 $(x_{10}, V_{20}, V_{20}, t_0) \in \Sigma$ 是映射 P 的不动点, 为了讨论其稳定性, 我们需要计算 Poincaré 映射在该点处的 Jacobi 矩阵

$$DP(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0) = \left[\frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right] \Big|_{(x_{10}, v_{10}, v_{20}, t_0)}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (24)$$

通过式(24)的特征值可判断系统(7)的周期解的稳定性. 根据 Floquet 理论对系统(7)周期解的结构及稳定性条件, 知: 1) 当所有特征值的模都小于 1 时, 系统(7)的周期解是渐近稳定的; 2) 当一个特征值通过 -1 穿过单位圆, 而其它特征值的模都小于 1 时, 系统(7)的周期解产生倍周期分岔; 3) 当一个特征值通过 1 穿过单位圆, 而其它特征值的模都小于 1 时, 系统(7)的周期解产生鞍结分岔; 4) 当一对共轭复特征值穿过单位圆, 而其它特征值的模都小于 1 时, 系统(7)的周期解产生 Hopf 分岔.

2 数值结果

为说明上述方法的正确性, 我们对一个简化的系统进行数值模拟. 令 $\omega_2 = 1$ 及 $\delta = 0$, 则有 $\gamma_1 = \gamma_2, S_{2n} = S_n, C_{2n} = C_n$, 于是得到以下系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + x_2 = f \cos(\omega t) \end{cases} \quad (25)$$

由方程(23)可得

$$x_{10} = \sqrt{\frac{n_d^2}{m_c^2 + m_s^2}} \quad (26)$$

式中

$$m_d = \frac{(f-1)(f+m)(1+r)S_n(-2\omega + 2\omega C_n C_p + (1+\omega^2)S_n S_p)}{(1+m)(-1+\omega^2)^2}$$

$$m_s = \frac{2(f-1)(C_n-1)(C_p+C_n(rC_p-1)+r(\omega S_n S_p-1))}{\omega^2-1}$$

$$m_c = \frac{2(f-1)(C_n-1)((1+rC_n)S_p-r\omega C_p)S_n}{\omega^2-1}$$

有

$$S_0 = m_s x_{10} / m_d \text{ 和 } C_0 = m_c x_{10} / m_d \quad (27)$$

以及碰撞前的速度

$$V_1 = \frac{((d-bf)(C_0(C_n-C_p)+S_0(S_p-\omega S_n))+(d-b)(\omega^2-1)(C_n-1)x_{10}}{r(\omega^2-1)S_n}$$

$$V_2 = \frac{((af-c)(C_0(C_n-C_p)+S_0(-\omega S_n+S_p))+(a-c)(\omega^2-1)(C_n-1)x_{10}}{r(\omega^2-1)S_n} \quad (28)$$

此外, 第 1 节的定理 1 中的条件(1)~(3)等价于下面的条件

$$S_n \neq 0, \text{ 即 } n \neq 1/k\omega \text{ 和 } n \neq \frac{1}{(k+1/2)\omega}, k=1, 2, \dots \quad (29)$$

$$(f-1)(-2\omega + 2\omega C_n C_p + (1+\omega^2)S_n S_p) \neq 0 \quad (30)$$

和

$$\begin{cases} (C_p + C_n(rC_p - 1) + r(\omega S_n S_p - 1)) \cdot \\ (f-1) \neq 0 \\ (1+rC_n)S_p - (\omega+r\omega C_p)S_n \neq 0 \end{cases} \quad (31)$$

之中至少有一个成立.

根据以上推导出来的公式, 我们还进行了数值模拟. 在图 2 中, 参数取值为 $m=0.5, r=0.8, f=10, \omega_2=1, \omega=2$, 这时得到单碰周期 $1/2$ 运动, 图 2 中分别为两个振子位置随时间变化的过程. 在图 3 中, 参数取值为 $m=0.5, r=0.8, f=2, \omega_2=1, \omega=2$,

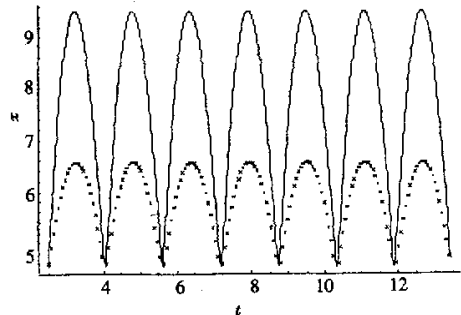


图 2 单碰周期 $1/2$ 运动

×代表 x_1 振子的时间历程, 实线代表 x_2 振子的时间历程

Fig. 2 Single-impact period-1/2 motions, where × means the time history of the oscillator x_1 , and the solid curve means that of the oscillator x_2

这时得到单碰周期 $1/3$ 运动,图中分别为两个振子位置随时间变化的运动过程. 数值模拟表明了本文

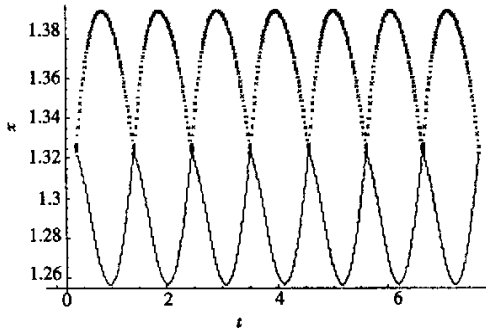


图3 单碰周期 $1/3$ 运动

×代表 x_1 振子的时间历程,实线代表 x_2 振子的时间历程

Fig. 3 Single-impact period- $1/3$ motions, where × means the time history of the oscillator x_1 , and the solid curve means that of the oscillator x_2

亚谐周期运动的存在性判据的正确性

3 结论

两自由度的碰撞系统因其分析的复杂性,一般难以得到碰撞周期运动的解析表示. 本文对一类具有较复杂碰撞条件的两自由度碰撞系统进行分析,经过细致的计算得到单碰周期 $1/n$ 的亚谐运动的存在性判据,并且讨论了亚谐运动的稳定性,数值模拟表明,该方法具有很好的预测性. 对于多点碰撞周期运动以及更复杂系统的动力学行为还需要进一步研究. 文章的优点可以准确地找到周期解出现的参数范围并且找到初始值,不论是稳定的周期解还是不稳定的周期解,用找到的初始值数值模拟能找到周期解.

参考文献

- Hsu CS. An unraveling algorithm for global analysis of dynamical systems—an application of cell-to-cell mapping. *J Appl Mech*, 1980, 47: 940~948
- Shaw SW, Homes PJ. A periodically forced impact oscillator with large dissipation. *J Appl Mech*, 1983, 50: 849~857
- Shaw SW. The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constraints (Parts I and II). *J Appl Mech*, 1985, 52:453~464
- Whiston GS. Global dynamics of a vibro-impacting linear

- oscillator. *J Sound and Vibration*, 1987, 118(3):395~424
- Whiston GS. The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one-dimensional linear oscillator. *J Sound and Vibration*, 1987, 115(2): 303~319
- Nordmark AB. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. *J Sound and Vibration*, 1991, 145(2): 279~297
- Nordmark AB. Effects due to low velocity in mechanical oscillators. *Int J of Bifur and Chaos*, 1992, 2(3): 597~605
- Nordmark AB. A universal limit mapping in grazing bifurcations. *Phys Rev E*, 1997, 55: 266~270
- Ivanov AP. Stabilization of an impact oscillator near grazing incidence owing to resonance. *J Sound and Vibration*, 1993, 162(3): 562~565
- Aidanpaa JO, Gupta RB. Periodic and chaotic behaviour of a threshold-limited two-degree-of-freedom system. *J Sound and Vibration*, 1993, 165(2): 305~327
- 胡海岩. 分段线性系统动力学的非光滑分析. 力学学报, 1996, 28(4): 483~488 (Hu Haiyan. Non-smooth dynamics analysis of piece-wise linear systems. *Acta Mech Sinica*, 1996, 28(4):483~488 (in Chinese))
- 胡海岩. 分段光滑机械系统动力学的进展. 振动工程学报, 1995, 8(4): 331~341 (Hu Haiyan. Advances in piece-wise smooth mechanical systems. *J Vibration Engineering*, 1995, 8(4): 331~341 (in Chinese))
- 谢建华. 一类碰撞振动系统的余维二分叉和Hopf分叉. 应用数学和力学, 1996, 17(1): 63~72 (Xie Jianhua. Codimension-2 bifurcation and Hopf bifurcation in an impact vibration system. *Appl Math Mech*, 1996, 17(1):63~72 (in Chinese))
- 张思进,陆启韶. 碰摩转子系统的非光滑分析. 力学学报, 2000, 32(1): 59~69 (Zhang Sijin, Lu Qishao. A non-smooth analysis to the rub-impacting rotor system. *Acta Mech Sinica*, 2000, 32(1): 59~69 (in Chinese))
- 陆启韶,张思进,王士敏. 转子-弹性机壳系统碰摩的分段光滑模型分析. 振动工程学报, 2000, 13(2), 178~187 (Lu Qishao, Zhang Sijin, Wang Shimin. Piece-wise smooth model analysis to rub-impact in rotor-elastic case systems. *J Vibration Engineering*, 2000, 13(2), 178~187 (in Chinese))
- 张思进,陆启韶. 碰摩转子映射系统的延迟反馈混沌控制. 固体力学学报, 2001, 22(1): 89~94 (Zhang Sijin, Lu Qishao. Delayed feedback control of chaos in rub-impact rotor mapping systems. *Acta Solide Mech Sinica*, 2001, 22(1):89~94 (in Chinese))
- 张彦梅,陆启韶,张思进. 一种非稳态油膜模型下转子

- 的碰摩分岔分析. 振动工程学报, 2002, 15(1):68~74 (Zhang Yanmei, Lu Qishao, Zhang Sijin. Impact Bifurcation analysis on a bearing-rotor system with unsteady oil film forces. *J Vibration Engineering*, 2002, 15(1):68~74 (in Chinese))
- 18 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰振系统运动分析. 力学学报, 2001, 33(6):776~786 (Li Qunhong, Lu Qishao. Analysis to motions of a two-degree-of-freedom system. *Acta Mech Sinica*, 2001, 33(6):776~786 (in Chinese))
- 19 Li Qunhong, Lu Qishao. Co-existing periodic orbits in impact vibration systems. *Appl Math Mech*, 2003, 24(3):261~273
- 20 Lu QS, Li QH, Twizell EH. Periodic motions in rub-impact rotor systems. *J Sound and Vibration*, 2003, 264:1127~1137

THE EXISTENCE OF SUBHARMONIC PERIODIC MOTION IN A TWO-DEGREE-OF-FREEDOM VIBRO-IMPACT SYSTEM*

Zhang Yanmei Lu Qishao Li Qunhong

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract An undamped two-degree-of-freedom vibro-impact system with a harmonic excitation is studied based on the theoretical analysis by Poincaré map. A criterion for the existence of single impact period- $1/n$ motions is obtained, and the initial position of the subharmonic periodic motion can be determined. The stability and the bifurcation of periodic motions are studied by computing the characteristic values of the Jacobian matrix. A combination of analytical and numerical techniques is proposed in the study of periodic motions of vibro-impact systems.

Key words impact system, subharmonic motion, Poincaré map, stability