第 1 卷第 1 期
2003 年 12 月
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 1 No. 1
Dec. 2003

关于非完整系统虚位移的不确定性问题与非线性问题

赵跃宇[1] 金 波[2] 许文喜[2]
(1. 湖南大学土木工程学院，长沙 410082) (2. 湖南大学工程力学系，长沙 410082)

摘要 研究了一般非完整系统虚位移关系的不确定性问题与非线性问题，提出了本质线性非完整约束和本质非线性非完整约束的概念，证明并给出了各种虚位移定义和交换关系的合理适用范围. 研究表明，在本质线性非完整系统中，各种虚位移定义和交换关系是合理的，可以在数学与力学上得到统一. 然而，在本质非线性非完整系统中，已有的虚位移定义和各种交换关系会导致数学或力学上的矛盾. 这些矛盾来源于对本质非线性非完整约束的物理实现不清楚.

关键词 非完整系统，Appell-Chetaev 定义，交换关系，虚位移

引 言

虚位移如同约束一样，是分析力学里面一个重要的基本概念. 在完整力学和非完整力学中都广泛地应用虚位移的概念. 但是在将虚位移概念向非完整系统、速度空间、加速度空间以及更高阶空间的推广过程中却遇到了不确定性和非线性问题[4,6]. 如何解决这两个问题，众多学者想到了各种各样的方法，这些方法具有一个相同点，就是将虚位移关系的不确定性和非线性问题通过引入交换关系和定义虚位移使它们确定化、线性化[4~6]. 但是并没有给出它们合理的适用范围，导致了在研究非完整系统时产生了诸多矛盾与困难；同时这些原因也使得 Hamilton 原理能否应用于非完整系统产生了很多争论[1~3]. 本文对非完整系统中应用的各种交换关系与虚位移定义进行了研究，提出了本质线性非完整约束和本质非线性非完整约束的概念，在本质线性非完整约束系统中统一了各种交换关系与虚位移定义.

1 不确定性问题与非线性问题

非完整约束相对于完整约束最根本的区别就是在非完整约束中，存在广义坐标变分 δq_s 和广义速度变分 $\delta \dot{q}_s$ 之间的不确定性关系以及广义坐标变分 δq_s 之间的非线性关系，如何合理解决非完整系统的这两个问题一直困绕着非完整动力学的研究.

设力学系统由 N 个质点组成，并受有 d 个完整约束，那么我们可以选 $n=3N-d$ 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 来确定系统的位形. 质点的矢径为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), (i = 1, 2, \cdots, N) \quad (1)$$

当系统的广义坐标发生无限小位移 $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$（即广义坐标的变分，或称为广义虚位移）时，质点的虚位移为

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \cdots, q_n + \delta q_n, t + \delta t) - \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s, (i = 1, 2, \cdots, N) \quad (2)$$

在计算(2)式时，时间 t 不变，即 $\delta t = 0$，并忽略了 δq_s 的高阶无穷小量.

如果系统是完整的，那么所有的广义坐标变分 $\delta q_s (s = 1, 2, \cdots, n)$ 彼此独立，或者说完全任意的. 这是因为对于完整系统来说，在选取 n 个独立广义坐标 q_s 之后，完整约束将自动得到满足. 因此，对于完整系统来说，独立坐标的数目就等于广义坐标的独立变分的数目，它们之间不存在不确定性和非线性问题.

但是如果系统受有如下形式的非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0, (\beta = 1, 2, \cdots, g; s = 1, 2, \cdots, n) \quad (3)$$

2003-08-04 收到第一稿，2003-10-10 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10272041).

那么,约束(3)式的变更

$$\delta f_\beta = f_\beta(q_s + \delta q_s, \dot{q}_s + \delta \dot{q}_s, t + \delta t) - f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) \tag{4}$$

将上式展开成 Taylor 级数,并略去二阶以上高次项,得

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\delta t = 0 \tag{5}$$

对于全部变分采用 Holder 交换关系

$$\delta \dot{q}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s, (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

则(5)式可以写成

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s) + \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\delta t = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right) + \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\delta t \tag{7}$$

对于形如(3)式的非完整系统,我们都有

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right) + \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\delta t = 0 \tag{8}$$

同时,我们可以将(3)式对时间 t 求一阶微商,得

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\mathrm{d}q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\mathrm{d}\dot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \tag{9}$$

(9)式则是非完整系统各个质点产生的实位移所应该满足的条件. 比较(8)式与(9)式,它们之间的内在联系就是 $d-\delta$ 运算的交换性. 对于一阶定常非完整约束系统(8)式将变成如下形式

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}_s = 0 \tag{10}$$

将(10)式展开成矩阵形式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial q_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \dot{q}_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \delta \dot{q}_s \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

从(11)式可以看到,δq_s 与 $\delta \dot{q}_s$ 之间存在不确定性关系. 这种不确定关系是导致虚位移定义多样性的一个原因.

如果系统受有形如(3)式的一阶非线性非完整约束,那么,约束加在虚位移上的条件应如何确定呢? 容易看出,利用前面的 Holder 交换关系(6)式,将给出广义坐标变分 δq_s 之间的非线性关系. 例如,当质点受有速度大小为常数的非线性非完整约束

$$\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 = C^2 = \mathrm{const} \tag{12}$$

或写成微分形式

$$(\mathrm{d}q_1)^2 + (\mathrm{d}q_2)^2 + (\mathrm{d}q_3)^2 = C^2(\mathrm{d}t)^2 \tag{13}$$

按 Holder 方法则有

$$(\delta q_1)^2 + (\delta q_2)^2 + (\delta q_3)^2 = 0 \tag{14}$$

关系(14)式显然是相对于广义坐标变分 $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ 的非线性关系. 这种非线性关系限制了与虚位移密切联系的变分原理的应用. 但是为了应用与虚位移密切联系的变分原理(例如 D'Alembert-Lagrange 原理[4])来推导非完整约束动力学系统的运动方程,众多的学者采取了将约束加在虚位移上的条件实行线性化的方法. 关于线性化的方法主要是 Appell-Chetaev 方法[4,6]如果系统受有形如(3)式的一阶非完整约束,则 Appell-Chetaev 定义广义坐标变分 δq_s 满足如下关系

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0, (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{15}$$

在 1964 年,我国学者牛青萍引入坐标空间、速度空间和加速度空间三个基本空间的概念,给出了各个空间所对应的约束和虚位移的定义[9]. 受有形如(3)式的非完整约束,牛青萍在速度空间给出的虚位移定义为

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s = 0, (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{16}$$

这两种线性化方法存在深刻的数学意义和线性化本质,都有它们的适用范围. 但是至今没有人研究过它们的合理适用范围,而是不加考虑地应用到所有的非完整约束动力学系统中,这样必将导致诸多的矛盾,甚至错误的结果.

Appell-Chetaev 定义(15)式自然把线性非完整约束当作特殊情况. 从(8)式可以看到,为了使 δf_β 用 δq_s 线性表出,而令 $\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right) = 0$,将微分符号提到求和号外面即得到 Appell-Chetaev 定义. 但是,在得到 Appell-Chetaev 定义时,约束必须满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}}\right)\delta q_s = 0 \tag{17}$$

Appell-Chetaev 定义不存在任何的物理、力学意义,纯粹是一种数学演绎的需要与结果.

可以看到, Appell-Chetaev 虚位移定义的应用是有条件的. 而且定义了虚位移只解决了非线性问题,还必须通过交换关系来解决不确定性问题. 这两种主要的交换关系是 Суслов 交换关系和 Holder 交

换关系，但是这两种交换关系是建立在 Appell-Chetaev 定义基础上的[4,5]；因此，它们的适用范围与 Appell-Chetaev 定义相同.

2 实位移处于虚位移的充分必要条件

实位移处于虚位移的充分必要条件是研究上述问题的一个重要方面. 文献[7]给出了一般的非完整约束动力学系统实位移处于虚位移的充分必要条件，并且对充分性和必要性进行了证明. 该定理为：对于一般的非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

实位移处于虚位移的充分必要条件是约束方程对广义速度的齐次性.

必要性证明，对于一般的非完整约束(18)式，如果实位移处于虚位移之中，则 dq_s 满足如下关系

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\mathrm{d}q_s=0 \tag{19}$$

因此

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=0 \tag{20}$$

这意味着 f_β 对 $\dot{q}_s$ 是齐次的.

充分性证明，设 f_β 对 $\dot{q}$ 为 k_β 齐次的，即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=k_\beta f_\beta \tag{21}$$

注意到(18)式，则有(20)式成立，由(20)式可得(19)式. 比较(19)式和(20)式，得知实位移处于无数虚位移之中. 该定理可以得到如下推论：

对于完整系统，实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程中不显含时间 t，这个推论与我们研究定常完整系统的要求是一致的. 那么我们将研究非完整系统实位移处于虚位移充分和必要条件.

3 线性化与确定化条件分析

比较非完整系统中几种虚位移的定义以及两种交换关系，它们在非完整系统中的应用都是有条件的，这个共同的条件就是非完整约束方程必须满足如下关系

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{22}$$

或

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s=0 \tag{23}$$

但是什么样的非完整约束才满足这样的条件呢？

定义 1 如果一阶非完整约束同时满足条件(15)式和(22)式，或者同时满足条件(16)式和(23)式，那么称为本质线性非完整约束. 否则称为本质非线性非完整约束. 这个概念可以推广到 k 次空间.

对于如下形式的一阶 m 次齐次定常非完整约束

$$f_\beta=(q_s,(\dot{q}_s)^m)=0,$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{24}$$

总可以写成下面的形式

$$f_\beta=\sum_{s=1}^{n}[a_{s\beta}\cdot(\dot{q}_s)^m]=0,$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{25}$$

其中 $a_{s\beta}=a_{s\beta}(q_1,q_2,\cdots,q_s)$.

将(25)式代入(22)式可得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_{s\beta}}{\partial q_s}(\dot{q}_s)^m\delta q_s \tag{26a}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\cdot a_{s\beta}\cdot(\dot{q}_s)^{m-1}]\}\cdot\delta q_s=$$
$$\sum_{s=1}^{n}[m(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{j\beta}}{\partial q_j}\dot{q})\cdot(\dot{q}_s)^{m-1}+$$
$$m\cdot(m-1)\cdot a_{s\beta}\cdot(\dot{q}_s)^{m-2}\cdot\ddot{q}_s]\cdot\delta q_s \tag{26b}$$

若 $m=0$，就是完整约束，有(26b)式为零，(26a)式变为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_{s\beta}}{\partial q_s}\delta q_s=0 \tag{27}$$

(27)式就是完整系统中的虚位移定义，在完整系统中，满足条件(15)式和(22)式.

若 $m=1$，就是本质线性非完整系统，比较(26a)式和(26b)式，在一般的情况下，可以看到两式并不相等，也就是不满足条件(15)式和(22)式.

若 $m\geqslant 2$，就是本质非线性非完整系统，比较(26a)式和(26b)式，在一般的情况下，可以看到两式并不相等，也就是不满足条件(15)式和(22)式.

但是，当 $m=1$ 时，且系数 $a_{s\beta}$为常数，则有(26a)式和(26b)式相等，满足条件(15)式和(22)式. 同时，如果约束每一个广义速度前的系数能够被表示为与广义速度相对应的齐次函数，即

$$a_{1\beta}=a_{1\beta}((q_1)^m),a_{2\beta}=$$
$$a_{2\beta}((q_2)^m),\cdots,a_{n\beta}=a_{n\beta}((q_n)^m)$$

也有(26a)式和(26b)式相等.

但是，当 $m\geqslant 2$ 时，如果约束方程(24)式中广义速度 $\dot{q}_s$ 前面的系数 $a_{s\beta}$为常数时，则有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=0 \tag{28}$$

要满足条件(23)式，则有牛清萍速度空间的虚位移

定义成立,即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s=0 \tag{29}$$

可以看到,在得到(28)式、(29)式的过程中,如果约束方程(24)式中广义速度 $\dot{q}_s$ 前面的系数 $a_{s\beta}$为常数,则满足本质线性非完整约束的定义.且与非线性齐次的次数 m 没有关系,只与广义速度 $\dot{q}_s$ 前面的系数有关.那么,可得如下命题

定理1 如果一阶非完整约束(24)式广义速度 $\dot{q}_s$ 的系数为常系数,那么一阶非完整约束是本质线性的,且与广义速度 $\dot{q}_s$ 的齐次次数 m 无关.

定理2 如果一阶非完整约束(24)式广义速度 $\dot{q}_s$ 的系数为与之相对应的广义坐标的 m 次函数,那么一阶非完整约束是本质线性的,且与广义速度 $\dot{q}_s$ 的齐次次数 m 无关.

文献[15]将牛清萍速度空间的虚位移定义向 k 次空间做了推广,按照文献[15]的思想,可以把定理2推广.

推论1 如果非完整约束为次空间广义速度 $q_s^{(k)}$ 的 m 次齐次函数,且 $q_s^{(k)}$ 前面的系数为常系数,那么 k 次空间的非完整约束是本质线性的,且与 k 次空间广义速度 $q_s^{(k)}$ 的齐次次数 m 无关.

证 设力学系统受有如下形式的非完整约束

$$f_\beta((q_s^{(k)})^m)=0,(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{30}$$

那么有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=0 \tag{31}$$

成立.要满足条件

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s^{(k)}}\delta_s^{(k)}=0 \tag{32}$$

则有,k 次空间的牛清萍虚位移定义[15,16]成立,即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s^{(k)}}\delta q_s^{(k)}=0 \tag{33}$$

推论得证.

但是在其它形式的非完整约束系统中,非完整约束是不满足定义1的,同时也不满足定理1,2和推论1,因此是本质非线性的.

4 结 论

通过前面的研究发现,Appell-Hamel 问题[4]属于本质线性非完整系统,同时,在这样非完整系统中使用 Appell-Chetaev 定义不会产生数学与力学上的矛盾;但是 Chaplygin-Caratheodory 问题[3]属于本质非线性非完整系统,应用 Appell-Chetaev 定义会产生数学上的矛盾;如果使用 Vacco 动力学方程来解决这个问题,将会产生约束力力学性质上的矛盾[17].

在一般非完整系统中,各种虚位移的定义以及根据虚位移定义得到的交换关系,它们的应用范围是有限的;并不能推广到所有的非完整力学系统中.否则,就会产生数学上的矛盾.

在完整约力学系统和本质线性的非完整力学系统中各种虚位移定义和交换关系都是等价的.对本质非线性的非完整系统,我们必须正确认识它的物理实现问题以及约束的非线性本质,努力寻求新的合理的方法来研究这样一类相当广泛的非完整系统.

参 考 文 献

1 陈滨. 关于经典非完整力学的一个争议. 力学学报, 1991, 23(3): 379~384(Chen Bin. A contention to the Classical Nonholonomic Dynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 23(3): 379~384(in Chinese))

2 郭仲衡, 高普云. 关于经典非完整力学. 力学学报, 1990, 22(2): 185~190(Guo Zhongheng, Gao Puyun. On the classical nonholonomic dynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22(2): 185~190(in Chinese))

3 郭仲衡, 高普云. 再关于非完整力学. 力学学报, 1992, 24(2): 253~257 (Guo Zhongheng, Gao Puyun. Further remarks on the nonholonomic dynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 24(2): 253~257(in Chinese))

4 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985(Mei Fengxiang. Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1985(in Chinese))

5 梅凤翔. 非完整系统力学中的交换关系. 力学与实践, 1979, 1(3): 37~38(Mei Fengxiang. Commutativity of mechanics of nonholonomic systems. *Mechanics in Engineering*, 1979, 1(3): 37~38(in Chinese))

6 梅凤翔. 非完整系统力学的历史与现状. 力学与实践, 1979, 1(4): 6~10(Mei Fengxiang. History and present of mechanics of nonholonomic systems. *Mechanics in Engineering*, 1979, 1(4): 6~10(in Chinese))

7 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991(Mei Fengxiang, Liu Duan, Luo Yong. Advanced Analytical Mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991(in Chinese))

8 Greenwood DT. Classical Dynamics. Michigan: Prentice-Hall, 1978

9 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程. 力学学报, 1964, 7(2): 139～148(Niu Qingping. Fundamental differential and equations of motion of nonholonomic systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1964, 7 (2): 139～148 (in Chinese))

10 Arnold VI, Kozlov VV. Neishtadt AI. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (2nd edition). New York: Spring-Verlag, 1993

11 Capon RS. Hamilton principle on relation to nonholonomic mechanical systems. *Quart J. Mech Appl Math*, 1954, 5(4): 472～480

12 Kozlov VV. Dynamics of systems with non-integrable constraints 1, 2, 3. *Mosc Univ Mech Bull*, 1983, 37:102 ～111

13 Liang LF, Wei Y. On the unification of the Hamilton principles in nonholonomic system and in holonomic system. *Appl Math and Mech*, 1996, 17(5): 457～463

14 Pars L A. Variation principles in dynamics. *Quart J Mech Appl Math*, 1954, 7(3): 338～351

15 赵跃宇. 力学的新型变分原理及其应用. [硕士论文]. 北京: 北京工业学院, 1987(Zhao Yueyu. New varitional principle of mechanics and its applications[MSc Thesis]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 1987 (in Chinese))

16 赵跃宇. 力学的新型积分变分原理. 力学学报, 1989, 21(1): 101～106(Zhao Yueyu. New integral varitional principle of mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21 (1): 101～106(in Chinese))

17 金 波. 关于非完整动力学的几个基本问题. [硕士论文]. 长沙: 湖南大学, 2003 (Jin Bo. On several basic problems of nonholonomic dynamics [MSc Thesis]. Changsha: Hunan University, 2003(in Chinese))

ON THE UNQUALITATIVE AND NONLINEAR PROBLEMS OF VIRTUAL DISPLACEMENT IN NONHOLONOMIC SYSTEM*

Zhao Yueyu[1]

(1. *College of Civil Engineering*, *Hunan University*, *Changsha* 410082, *China*)

Jin Bo[2] Xu Wenxi[2]

(2. *Department of Engineering Mechanics*, *Hunan University*, *Changsha* 410082, *China*)

Abstract The unqualitative and nonlinear problems of virtual displacement in nonholonomic system are studied. The concepts of intrinsical linear nonholonomic constraint and intrinsical nonlinear nonholonomic constraint are put forward. The spectrums in applying all kinds of the virtual-displacement concepts and the commutativity operations were testified and given. The study shows that, in intrinsical linear nonholonomic system, all kinds of the virtual-displacement concepts and the commutativity operations are rational; But in intrinsical nonlinear nonholonomic system, they are not rational. So the physical realization of intrinsical nonlinear nonholonomic constraint must be studied.

Key words nonholonomic system, Appell-Chetaev definition, commutativety of operations, virtual displacement

Received 04 August 2003, revised 10 October 2003.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10272041).