第1卷第1期
2003年12月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 1 No. 1
Dec. 2003

Feigenbaum吸引子的结构*

谢建华

（西南交通大学应用力学与工程系，成都 610031）

摘要 用一个分段线性单峰映射描述了二次映射Feigenbaum吸引子的数学结构，证明了存在一个周期2^n的正则F_μ-圈嵌套序列，由其生成的吸引的极小Cantor集与单边符号空间的一个所谓"加法器"拓扑共轭. 对现有结果作了若干补充和简化证明.

关键词 二次映射，Feigenbaum吸引子，加法器

二次映射$F_\mu(x)=\mu x(1-x)$是混沌理论研究的主要对象之一，很多新概念来源于此模型. Feigenbaum在对此映射的数值模拟中发现了周期倍化过程的普适性[1]. Lanford证明了重正化算子不动点的存在性，及Feigenbaum普适常数等于不动点沿不稳定方向的特征值，但证明过程中用了若干数值估计[2]. Sullivan等论证了二次映射Feigenbaum吸引子是一个吸引的极小Cantor集，映射在此集上的限制拓扑共轭于单边符号空间的一个所谓的"加法器"(adding machine)，用到了较多的数学工具，证明很复杂[3]. 文[4]讨论了相应的揉序列的构造与性质. 文[5]构造一个可无限次重正化的分段线性单峰映射，描述了Feigenbaum吸引子的结构. 本文对文[5]的分析作了三点补充：1)用数学归纳法给出了吸引的极小Cantor集存在性的证明；2)论证了Feigenbaum吸引子是临界点向前轨道的闭包；3)利用Hofbauer tower的结构，说明了Feigenbaum吸引子是无处稠密的. 本文对于[6]中所列的诸结论给出了具体的证明.

当$\mu\to\mu_\infty$($\mu_\infty\approx3.5699456$)时，$F_\mu$的不动点由周期倍化分叉形成一个非周期吸引子，称为Feigenbaum吸引子(图1). 此时$F=F_{\mu_\infty}$是无限次可重正化的，即存在一个递增的序列$0=b_0<b_1<\cdots<b_n<\cdots<1/2$，使$F^{2^n}|[b_n,1-b_n]$与$F|[0,1]$拓扑共轭(图2). 文[5]构造与$F$拓扑共轭的分段线性单峰映射$f$(图3). 具体构造如下：取$I=[0,1]$，令$a_n=\frac{1}{2}(1-3^{-n})$和$f(a_n)=\frac{4}{5}(1-6^{-n})$，$(n\geq0)$. 定义$f$在$[a_n,a_{n-1}]$($n\geq0$)上是线性的，斜率为$2^{-n+1}$，因此$f$在$[0,1/2)$上是严格增加的，令$f(1/2)=4/5$

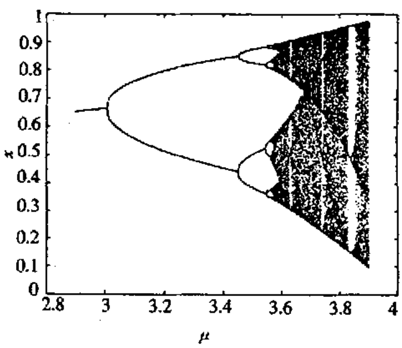

图1 二次映射的轨迹图($2.9\leq\mu\leq3.9$)

Fig. 1 The orbit diagram of quadratic family ($2.9\leq\mu\leq3.9$)

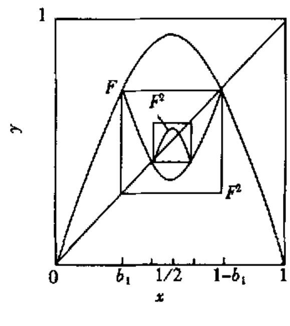

图2 F是无限次可重正化的

Fig. 2 F is infinitely often renormalizable

及对$x\in(1/2,1]$，$f(x)=f(1-x)$. 如此定义的f是连续的单峰映射(图3)，其中$[a_1,1-a_1]=[1/3,2/3]$. 由f的构造，不难看出f^2在$[a_{n+1},a_{n+2}]$上的

2003-09-24收到第一稿，2003-10-30收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10072051)，高等学校博士学科点专项基金资助项目(20010613001).

斜率与 f 在 $[a_n,a_{n+1}]$ 上斜率的绝对值相同,因此 f 与 $g=f^2|_{[a_1,1-a_1]}$ 是线性拓扑共轭的,即:

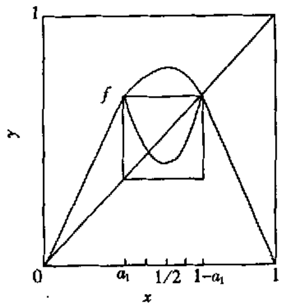

图3 f 是无限次可重正化的

Fig. 3 f is infinitely often renormalizable

命题1 设 $\Psi:I\to[a_1,1-a_1]$,$\Psi(t)=\frac{1}{3}(2-t)$,则 $g=\Psi\circ f\circ\Psi^{-1}$.

证 由构造,$f(a_{n+1})=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}f(a_n)$,由于 f 在 $[a_n,a_{n+1}]$ 上线性的,故对 $t\in[0,1/6)$,$f\left(\frac{1}{2}-t\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}f\left(\frac{1}{2}-3t\right)$,从而 $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}f(3x-1)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}f(2-3x)$ 对 $x\in[1/3,2/3)$ 成立. 当 $x\in[1/3,2/3]$ 时,$f(x)\in[2/3,1]$ 及 $f(x)=2(1-x)$,从而

$$f^2(x)=2\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}f(2-3x)\right)\right]=\frac{1}{3}(2-f(2-3x)),x\in[1/3,2/3).$$

命题2 对任何 $n\geqslant1$,$f^{2^n}[a_n,1-a_n]\subset[a_n,1-a_n]$,如果 g_n 是 f^{2^n} 在 $[a_n,1-a_n]$ 上的限制,则 $g_n=\Psi_n\circ f\circ\Psi_n^{-1}$,其中 $\Psi_n:[0,1]\to[a_n,1-a_n]$ 为线性坐标变换

$$\Psi_n(t)=\begin{cases}(1-a_n)-(1-2a_n)t, & \text{如果 } n \text{ 为奇数}\\ a_n+(1-2a_n)t, & \text{如果 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

证 令 $\Psi=\Psi_1$,由命题1,用归纳法证之.

定义1[5] 设 f 是 $I=[a,b]$ 上连续的单峰映射,$m\geqslant1$,闭集 $D\subset I$ 是 m 个互不相交的闭区间 $B_0,B_1,\cdots,B_{m-1}$ 的并,且 $f(B_{k-1})\subset B_k,k=1,\cdots,m-1$ 及 $f(B_{m-1})\subset B_0$,称 D 为周期 m 的 f-圈. 如果 $f(B_{k-1})=B_k,k=1,\cdots,m-1$ 及 $f(B_{m-1})=B_0$,称 f-圈为正则的(proper);如果存在 $x\in D$,使 $\overline{\{f^n(x);n\geqslant0\}}=D$,则称 f-圈为拓扑传递的.

记 $\mathrm{per}(D)$ 为 f-圈的周期. 如果 D_1 和 D_2 均是 f-圈,且 $D_2\subset D_1$,显然 $\mathrm{per}(D_1)|\mathrm{per}(D_2)$,并且 D_1 的每个闭区间中含有 D_2 中的 $\mathrm{per}(D_2)/\mathrm{per}(D_1)$ 个闭区间. 令 $\{D_n\}_{n\geqslant1}$ 是 f-圈的嵌套序列,如果 $\mathrm{per}(D_{n+1})>\mathrm{per}(D_n)$,$(n\geqslant1)$,称 $\{D_n\}_{n\geqslant1}$ 序列是分裂的(splitting).

定义2[5] 设 f 是 $I=[a,b]$ 上连续的单峰映射,c 为 f 的临界点,D 为 f-圈,定义

1)$T(f^n)=\{x\in(a,b)|$存在 $0\leqslant k<n$,使 $f^k(x)=c\}$;

2)$Z(f)=\{x\in(a,b)|$存在 $\varepsilon>0$,对任何 $n\geqslant0$,f^n 在 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 上单调$\}$;

3)$A(D,f)=\{x\in I|$存在某个 n,使 $f^n(x)\in\mathrm{int}(D)\}$.

由定义可知 $Z(f)$ 是开集,且 $Z(f)$ 是 (a,b) 中最大的开集 G,使对任意 $n\geqslant0$,$f^n(G)\cap T(f)=\phi$.

定义3[5] 设 $R\subset I$ 为闭集,如果存在分裂的正则 f-圈的嵌套序列 $\{K_n\}_{n\geqslant1}$,满足 $K_1\cap Z(f)=\phi$,使 $R=\bigcap\limits_{n\geqslant1}K_n$,称 R 为 f-注册移位(f-register-shift),$\{K_n\}_{n\geqslant1}$ 为 R 的一个生成子(generator).

命题3 如果 R 为 f-注册移位,则 $\mathrm{int}(R)=\phi$,$f|R$ 是 R 上的同胚,且对任何 $x\in R$,轨道 $\{f^n(x)\}_{n\geqslant0}$ 在 R 中处处稠密.

证 设 $J\subset\mathrm{int}(R)$ 是开区间. 对任何的 $n\geqslant0$,$J\subset K_n$,从而

$$J,f(J),\cdots,f^{m_n-1}(J)$$

是互不相交的区间,其中 m_n 为 K_n 的周期,当 $n\to\infty$ 时,$m_n\to\infty$,所以 $\{f^n(J)\}_{n\geqslant0}$ 是互不相交的区间. 必然存在 $k\geqslant0$,当 $n\geqslant k$ 时,$f^n(J)\cap T(f)=\phi$,从而 $\mathrm{int}(f^k(J))\subset Z(f)$,$K_1\cap Z(f)\neq\phi$,此与假设矛盾,故 R 是无处稠的闭集.

记 ε_n 是构成 K_n 的 m_n 个闭区间长度中的最大者,由于 R 是无处稠的,必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 设 $x,y\in R$,存在 k,使 $f_k(x)$ 与 y 同属于 K_n 中的同一个闭区间,由 n 的任意性,可知轨道 $\{f^n(x)\}_{n\geqslant0}$ 在 R 中处处稠密.

最后容易验证 $f|_R:R\to R$ 是同胚映射.

上命题表明 R 是 f 的极小 Cantor 集.

定义4 设 $f:I\to I$ 为区间上的连续映射,若对 $x\in I$,满足:

1)对任何 $\varepsilon>0$,存在 $n>0$,对任何 $j,k>0$,$j=k(\mathrm{mod}\,n)$,有 $|f^j(x)-f^k(x)|<\varepsilon$;

2)若 $j=k(\mathrm{mod}\,n)$,$j\neq0(\mathrm{mod}\,n)$,$x\notin\langle f^j(x),f^k(x)\rangle$(其中 $\langle a,b\rangle$ 表示以 a,b 为端点的区间),称 x 为 f 的拟周期点(pseudo-periodic point).

命题 4　若 R 为 f-注册移位,则 R 中的每一个点均是 f 的拟周期点.

再回到分段线性映射 f. 记 $J_0=[f^2(1/2), f(1/2)]=[2/5,4/5]$,显然 $f(J_0)=J_0$,J_0 是周期 2^0 的正则 f-圈. 记 $K_0=J_0$,$J_n=\Psi_n(J_0)$ 和 $K_n=\bigcup_{j=0}^{2^n-1} f^j(J_n)$(图 4).

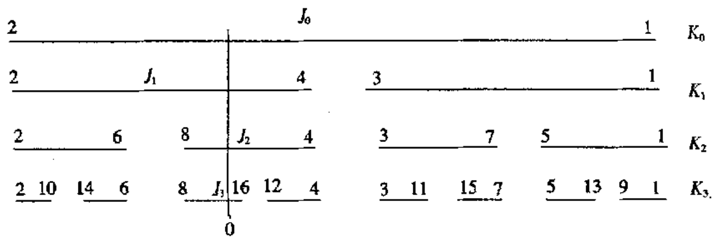

图 4　形成 Feigenbaum 吸引子的闭区间嵌套序列

Fig. 4　The nest of the closed intervals that forms the Feigenbaum attractor

命题 5　任何 $n>0$,K_n 是周期 2^n 的正则 f-圈,$K_{n+1}\subset K_n$,$[0,1]-A(K_n,f)$是可数的,及 $Z(f)=\phi$.

证　由命题 2,$g_n(J_n)=g_n(\Psi_n(J_0))=\Psi_n(f(J_0))=\Psi_n(J_0)=J_n$. 显然

$$J_1=[f^2(c),f^4(c)]\subset[f^2(c),f(c)]=J_0$$

一般有 $c\in J_{n+1}\subset J_n$,且当 $n\geqslant 0$ 时,

$$J_n=\begin{cases}[f^{2^n}(c),f^{2^{n+1}}(c)], & n\text{ 为奇数}\\ [f^{2^{n+1}}(c),f^{2^n}(c)], & n\text{ 为偶数}\end{cases}\tag{1}$$

及

$$|f^{2^{n+1}}(c)-c|<|f^{2^n}(c)-c|\tag{2}$$

(2)式表明 $f^{2^{n+1}}(c)$ 比 $f^{2^n}(c)$ 更接近 c 点,从而,对 $n\geqslant 0$,$f(J_n)=[f^{2^n+1}(c),f(c)]$. 显然 $K_1\subset K_0$,且 K_0 和 K_1 分别是周期 2^0,2^1 的正则 f-圈. 假设

$$K_{n-1}=\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1}f^j(J_{n-1})=\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}\langle f^i(c),f^{2^{n-1}+i}(c)\rangle$$

是周期 2^{n-1}的正则 f-圈,则 J_n 与 $J_n'=f^{2^{n-1}}(J_n)$是 J_{n-1}中的两个互不相交的闭区间,且

$$f^{2^{n-1}}(J_n)=J_n',\ f^{2^{n-1}}(J_n')=J_n$$

因此 $f^i(J_n)$,$f^i(J_n')$($0\leqslant i<2^{n-1}$)是 $f^i(J_{n-1})$中两个互不相交的闭区间,于是

$$f^i(J_n)=\langle f^i(c),f^{2^n+i}(c)\rangle,\ i=1,\cdots,2^n$$

是 2^n 个互不相交的闭区间,且 $K_n\subset K_{n-1}$,从而 K_n 是周期 2^n 正则 f-圈.

由于 $f(K_n)=K_n$,K_n 是正向的不变集,因此对任何的 $x\in K_n$,$\{f^n(x)\mid n\geqslant 0\}\subset K_n$. 如果 Γ 是 f 的一条周期轨道,则或 $\Gamma\subset K_n$,或 $\Gamma\cap K_n=\phi$.

显然 $I-A(K_0,f)=\{0,1\}$,即 I-$A(K_0,f)$仅包含不动点 0 及其原像 1;$I-A(K_1,f)$ 由不动点 0,1/3 及它们的原像构成;任何 $n\geqslant 1$,$I-A(K_n,f)$,是由周期 2^i($i<n$)轨道及其它们的原像构成,因此是可数的.

可证明 $B=\{x\mid x=a_n,1-a_n,n=0,1,\cdots\}\subset\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}T(f^n)}$. 设 $Z(f)\neq\phi$,取 $Z(f)$的一个最大开区间 K,记 $l=\sup_{n\geqslant 0}|f^n(L)|>0$,取 $k\geqslant 0$,使 $|f^k(L)|>l/2$. $f^k(L)$必包含在某个(a_m,a_{m+1})或$(1-a_{m+1},1-a_m)$之中,f^{2m}在(a_m,a_{m+1})或$(1-a_{m+1},1-a_m)$上的斜率的绝对值为 2,故$|f^{k+2^m}(L)|>l$,,由此导出矛盾,从而 $Z(f)=\phi$. 命题 5 证毕.

显然 $R=\bigcap_{n\geqslant 0}K_n=\omega(c,f)=\overline{(f^n(c)\mid n\geqslant 0)}$,其中 $\omega(c,f)$表示临界点 $c=1/2$ 的正向极限集,而 $\overline{(f^n(c)\mid n\geqslant 0)}$表示通过点 c 正向轨道的闭包.

设$\underline{k}=\{k_n\}_{n\geqslant 1}$($k_n\geqslant 2$)是正整数无穷序列,$\Sigma_{\underline{k}}=\prod_{n=1}^{\infty}\{0,\cdots,k_n-1\}$是由单边无穷符号序列$\underline{i}=(i_n)_{n\geqslant 1}$($0\leqslant i_n<k_n$)全体构成的符号空间,在 $\Sigma_{\underline{k}}$ 上定义距离 $d(\underline{i},\underline{j})=\sum_{n=1}^{\infty}|i_n-j_n|/k_n^n$,$\Sigma_{\underline{k}}$ 与 Cantor 集同胚.

定义 5[7,8]　具有基$\underline{k}=\{k_n\}_{n\geqslant 1}$的"加法器"(adding machine)是 $\Sigma_{\underline{k}}$上的映射

$$\sigma(i_1,i_2,\cdots)=$$

$$\begin{cases}(\overbrace{0,\cdots,0}^{l-1},i_l+1,i_{l+1},\cdots) & \text{如果当 } j<l,\ i_j=k_j-1\text{ 及 }i_l<k_l-1\\ (0,\cdots,0,\cdots), & \text{如果对所有的 } j,\ i_j=k_j-1\end{cases}$$

命题6 $\sigma:\Sigma_{\underline{k}}\to\Sigma_{\underline{k}}$是极小同胚.

证 容易验证σ是一对一,连续的满射,又$\Sigma_{\underline{k}}$为紧的Hausdoff空间,故σ是同胚. 对任何$j>0$,及$\underline{a},\underline{b}\in\Sigma_{\underline{k}}$,对$i=1,\cdots,j$,记

$$n_i = b_i - a_i(\mathrm{mod}k_i),$$

$$N_j = n_1 + k_1n_2 + \cdots + (k_1\cdots k_{j-1})n_j$$

则$\sigma^{N_j}(\underline{a})$与$\underline{b}$前$j$项一致,从而$\sigma^{N_j}(\underline{a})\to\underline{b}$,即$\underline{b}\in\omega(\underline{a},\sigma)$,因此$\sigma$是极小的.

命题7 设$f:I\to I$是连续的单峰映射,$\{K_n\}_{n\geqslant1}$是f-注册移位R的生成子,记$\underline{k}=\{k_n\}_{n\geqslant1}$,其中$k_1=\mathrm{per}(K_1)$,$k_i=\mathrm{per}(K_i)/\mathrm{per}(K_{i-1})$,$i\geqslant2$,则$f|R$与$\sigma|\Sigma_{\underline{k}}$拓扑共轭.

证 标记K_1的k_1个闭子区间为$K_0^1,K_1^1,\cdots,K_{k_1-1}^1$,使$f(K_i^1)=K_{\pi(i)}^1$,$\pi(i)=i+1(\mathrm{mod}k_1)$. 每个$K_i^1$中含有$K_2$中的$k_2$个闭子区间,将用$K_{ij}^2(0\leqslant i\leqslant k_1-1,0\leqslant j\leqslant k_2-1)$来标记这些子区间:任意选取$K_{00}^2\subset K_0^1$,对任意的$i=1,\cdots,k_1-1$,有$f^i(K_{00}^2)\subset K_i^1$,记$K_{i0}^2=f^i(K_{00}^2)$. 闭区间$f(K_{k_1-1,0}^2)$与$K_{00}^2$相异,记其为$K_{01}^2$. 继续此标号过程,我们有

$$f(K_{ij}^2)=\begin{cases}K_{i+1,j}^2, & 如果\ i<k_1-1\\ K_{0,j+1}^2, & 如果\ i=k_1-1,j<n_2-1\\ K_{00}^2, & 如果\ i=k_1-1,j=k_2-1\end{cases}$$

在数对$(i,j)\in\{0,\cdots,k_1-1\}\times\{0,\cdots,k_2-1\}$上,定义循环映射

$$\sigma_2(i,j)=\begin{cases}i+1,j, 如果\ i<k_1-1\\ 0,j+1, 如果\ i=k_1-1,j<n_2-1\\ 0,0, 如果\ i=k_1-1,j=k_2-1\end{cases}$$

一般地,假设K_n已用n重数组$\underline{g}=g_1,\cdots,g_n(0\leqslant g_i\leqslant k_i-1)$标记,并使$f(K_{\underline{g}}^n)=K_{\sigma_n(\underline{g})}^n$,我们用$n+1$重数组$\underline{g},j$,标记$K_{n+1}$的闭子区间如下

$$K_{\underline{g},j}^{n+1}\subset K_{\underline{g}}^n,\quad 0\leqslant j\leqslant k_{n+1}-1$$

$$f(K_{\underline{g},j}^{n+1})=K_{\sigma_{n+1}(\underline{g},j)}^{n+1},\quad 0\leqslant j\leqslant k_{n+1}-1$$

其中

$$\sigma_{n+1}(\underline{g},j)=\begin{cases}\sigma_n(\underline{g},j), 如果\ \sigma_n(\underline{g})\neq0,\cdots,0\\ \underline{0},j+1, 如果\ \sigma_n(\underline{g})=0,\cdots,0\end{cases}$$

此处$j+1$取$\mathrm{mod}(k_{n+1})$.

最后令$n\to\infty$,则$\sigma_n\to\sigma$. 由于R不含非平凡的区间,可知对任何$\underline{i}\in\Sigma_{\underline{k}}$,$K_{\underline{i}}^{\infty}=\{x\}$是单点集,定义

$$\varphi:R\to\Sigma_{\underline{k}},\varphi(x)=\underline{i}$$

容易验证φ是同胚. 并且

$$(\varphi\circ f)(x)=(\varphi\circ f)(K_{\underline{i}}^{\infty})=\varphi(K_{\sigma(\underline{i})}^{\infty})=$$
$$\sigma(\underline{i})=(\sigma\circ\varphi(x)),\forall\ x\in R$$

命题7证毕.

命题7的证明参考了文[8].

由命题5和7推出:

定理1 $f|R$与$\sigma|\Sigma_{\underline{k}}$拓扑共轭,其中$\underline{k}=(2,2,\cdots)$.

相同的分析可以证明$F|\omega(c,F)$与$\sigma|\Sigma_{\underline{k}}$是拓扑半共轭的. 为证明拓扑共轭的结论,只需补充说明$\omega(c,F)$不含有非平凡的区间. 为此我们引用Hofbauer tower的结构[3].

设f是上$I=[0,1]$的单峰映射,记$c_n=f^n(c)(n\geqslant1)$. Hofbauer tower是I上互不相交的开区间的并,即:$\hat{I}=\bigcup D_n$,其中$D_1=(c,c_1)$,归纳定义

$$D_{n+1}=\begin{cases}f(D_n) & 如果\ c\notin\overline{D_n},\\ (c_{n+1},c_1) & 如果\ c\in\overline{D_n},\end{cases}\tag{3}$$

如果$c_n=c$那么$D_{n+1}=\phi$;Hofbauer tower由有限层构成. c_n总是D_n的一个端点. 如果(3)的第2式成立,则称n为“切割次数”(cutting time). 切割次数用S_k表示,其中$S_0=1$. 由定义可知,对所有k,$D_{S_k+1}=(c_{S_k+1},c_1)$,此外对所有$S_k<n\leqslant S_{k+1}$

$$D_n=(c_n,c_{n-S_k})\tag{4}$$

用归纳法可证明$D_n\subset D_{n-S_k}$,从而$c\in D_{S_{k+1}}\subset D_{S_{k+1}-S_k}$,故$S_{k+1}-S_k$也为切割次数,定义揉搓映射

$$Q:N\to N\cup\infty,S_{Q(k)}=S_k-S_{k-1}\tag{5}$$

例如F对应的Hofbauer tower如图5所示,不难算出$Q(k)=2^k$.

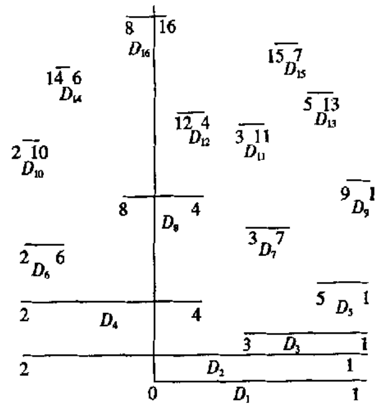

图5 F对应的Hofbauer tower
Fig.5 Hofbauer tower of F

引理1[3] 如果$\lim\limits_{k\to\infty}Q(k)=\infty$,则$\omega(c,f)$是吸引的Cantor集.

定理2 $F|\omega(c,F)$与加法器$\sigma|\Sigma_{\underline{k}}$拓扑共轭,其

中$\underline{k}=(2,2,\cdots)$.

最后值得注意的两点是:1)在μ_∞的右侧,二次映射存在一个倒分叉序列,在两个倒分叉参数值之间,存在一个周期2^n的F_μ-圈;2)每个周期窗口,对应一个由周期$p(p\geqslant 1)$轨道倍化分叉序列产生的广义Feigenbaum吸引子,此吸引子可能等价于基为$\underline{k}=(p,2,2,\cdots)$的加法器.

参考文献

1 Feigenbaum MJ. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J Stat Phys*, 1978,19:25~52

2 Lanford OE. A computer assisted proof of the Feigenbaum conjecture. *Bull Amer Math*, 1979,37(1):22~48

3 DeMelo W, Strien SV. One-Dimensional Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1993. 437~554

4 谢惠民. 复杂性与动力系统. 上海:上海科技教育出版社,1994. 87~96(Xie Huimin. Complexity and Dynamical Systems. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1994. 87~96(in Chinese))

5 Preston C. Iterates of Piecewise Monotone Mappings on an Interval. Lecture Notes in Math. Vol. 1347. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1988. 20~33,50~56

6 谢建华. Feigenbaum吸引子是什么? 力学与实践,2002,24(1):63~64(Xie Jianhua. What is Feigenbaum attractor? *Mechanics in Engineering*, 2002,24(1):63~64(in Chinese))

7 Block LS, Coppel WA. Dynamcis in One Dimension. Lecture Notes in Math. Vol. 1513. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1992. 133~149

8 Nitecki Z. Topological dynamics on the interval. In: Katok A. Ergodic Theory and Dynamical Systems, II. Proceedings Special Years, Maryland, 1979 ~ 1980. Boston: Birkhäuser, 1982

THE STRUCTURE OF FEIGENBAUM ATTRACTOR*

Xie Jianhua

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031,*China)*

Abstract By a piecewise linear unimodal map, we described the mathematical structure of Feigenbaum attractor and proved that the quadratic family possessed a nest of proper F_μ- cycles with period 2^n which determined an attractive minimal Cantor set. The subsystem of the map on the set was topologically conjugate to a so-called "adding machine" on the symbol sequence space. Some supplements were added to the recent results and several proofs were simplified.

Key words quadratic family, Feigenbaum attractor, adding machine

Received 24 September 2003, reviced 30 October 2003.

* The project supported by the National Natural Science Foundation (10072051) and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20010613001).